La réécriture algébrique

Dupont Benjamin

Séminaire des doctorants et doctorantes

Lundi 28 Mai 2018

Plan de l'exposé

I. Systèmes de réécriture abstraits

II. Réécriture de mots

III. Bases d'homotopie et finitude homologique

IV. Nouveaux thèmes de recherche

I. Systèmes de réécriture abstraits

Définition et vocabulaire

- Un système de réécriture abstrait (SRA) est la donnée d'un ensemble A et d'une relation binaire $\rightarrow$ sur A, c'est à dire

$$\rightarrow \subset A \times A$$

Définition et vocabulaire

- Un système de réécriture abstrait (SRA) est la donnée d'un ensemble A et d'une relation binaire $\rightarrow$ sur A, c'est à dire

$$\rightarrow \subset A \times A$$

- $\rightarrow$ est appelée réduction ou relation de réécriture sur A. Un élément $(a, b) \in \rightarrow$ sera noté $a \rightarrow b$ et appelé une étape de réécriture de a vers b.

Définition et vocabulaire

- Un système de réécriture abstrait (SRA) est la donnée d'un ensemble A et d'une relation binaire $\rightarrow$ sur A, c'est à dire

$$\rightarrow \subset A \times A$$

- $\rightarrow$ est appelée réduction ou relation de réécriture sur A. Un élément $(a, b) \in \rightarrow$ sera noté $a \rightarrow b$ et appelé une étape de réécriture de a vers b.

- Une suite de réécriture pour $\rightarrow$ est une suite finie ou infinie d'étapes de réécritures

$$a = a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \ldots$$

Définition et vocabulaire

- Un système de réécriture abstrait (SRA) est la donnée d'un ensemble A et d'une relation binaire $\rightarrow$ sur A, c'est à dire

$$\rightarrow \subset A \times A$$

- $\rightarrow$ est appelée réduction ou relation de réécriture sur A. Un élément $(a, b) \in \rightarrow$ sera noté $a \rightarrow b$ et appelé une étape de réécriture de a vers b.

- Une suite de réécriture pour $\rightarrow$ est une suite finie ou infinie d'étapes de réécritures

$$a = a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \ldots$$

- Si on a une suite de réécriture finie

$$a = a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \ldots a_n = b,$$

on dit que a se réécrit en b. La longueur d'une suite de réécriture finie est le nombre d'étapes de réécritures.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\rightarrow$ est $\rightarrow^{-} := \leftarrow = \{(b, a) \mid a \rightarrow b\}$.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\rightarrow$ est $\rightarrow^{-} := \leftarrow = \{(b, a) \mid a \rightarrow b\}$.
- La clôture réflexive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{\equiv} = \rightarrow \cup \xrightarrow{0}$.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a,a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\rightarrow$ est $\rightarrow^{-} := \leftarrow = \{(b,a) \mid a \rightarrow b\}$.
- La clôture réflexive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{\equiv} = \rightarrow \cup \xrightarrow{0}$.
- La clôture symétrique de $\rightarrow$ est $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a,a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\rightarrow$ est $\rightarrow^{-} := \leftarrow = \{(b,a) \mid a \rightarrow b\}$.
- La clôture réflexive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{\equiv} = \rightarrow \cup \xrightarrow{0}$.
- La clôture symétrique de $\rightarrow$ est $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$.
- La clôture transitive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{+} \subseteq \bigcup_{i>0} \xrightarrow{i}$ où $\xrightarrow{i}$ désigne les suites de réécriture de longueur i.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\rightarrow$ est $\rightarrow^{-} := \leftarrow = \{(b, a) \mid a \rightarrow b\}$.
- La clôture réflexive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{\equiv} = \rightarrow \cup \xrightarrow{0}$.
- La clôture symétrique de $\rightarrow$ est $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$.
- La clôture transitive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{+} \subseteq \bigcup_{i>0} \xrightarrow{i}$ où $\xrightarrow{i}$ désigne les suites de réécriture de longueur i.
- La clôture réflexive et symétrique de $\rightarrow$ sera notée $\twoheadrightarrow$ ou $\rightarrow^{*}$ et est définie par

$$\twoheadrightarrow = \xrightarrow{+} \cup \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\to$ est $\to^{-} := \leftarrow = \{(b, a) \mid a \to b\}$.
- La clôture réflexive de $\to$ est $\xrightarrow{\equiv} = \to \cup \xrightarrow{0}$.
- La clôture symétrique de $\to$ est $\leftrightarrow := \to \cup \leftarrow$.
- La clôture transitive de $\to$ est $\xrightarrow{+} \subseteq \bigcup_{i>0} \xrightarrow{i}$ où $\xrightarrow{i}$ désigne les suites de réécriture de longueur i.
- La clôture réflexive et symétrique de $\to$ sera notée $\twoheadrightarrow$ ou $\to^{*}$ et est définie par

$$\twoheadrightarrow = \xrightarrow{+} \cup \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

- La clôture réflexive, transitive et symétrique de $\to$ est

$$\xrightarrow{\top} := \overset{*}{\leftrightarrow} = (\leftarrow \cdot \to)^{*}.$$

On a $a \overset{*}{\leftrightarrow} b$ si et seulement si il existe une suite de réécriture en zig-zag de a vers b.

Quelques notations

- La réduction identité est $\xrightarrow{0} = \{(a, a) \mid a \in A\}$.
- La relation inverse de $\rightarrow$ est $\rightarrow^{-} := \leftarrow = \{(b, a) \mid a \rightarrow b\}$.
- La clôture réflexive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{\equiv} = \rightarrow \cup \xrightarrow{0}$.
- La clôture symétrique de $\rightarrow$ est $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$.
- La clôture transitive de $\rightarrow$ est $\xrightarrow{+} \subseteq \bigcup\limits_{i>0} \xrightarrow{i}$ où $\xrightarrow{i}$ désigne les suites de réécriture de longueur i.
- La clôture réflexive et symétrique de $\rightarrow$ sera notée $\twoheadrightarrow$ ou $\rightarrow^{*}$ et est définie par

$$\twoheadrightarrow = \xrightarrow{+} \cup \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

- La clôture réflexive, transitive et symétrique de $\rightarrow$ est

$$\xrightarrow{\top} := \overset{*}{\leftrightarrow} = (\leftarrow \cdot \rightarrow)^{*}.$$

On a $a \overset{*}{\leftrightarrow} b$ si et seulement si il existe une suite de réécriture en zig-zag de a vers b.

La relation $\overset{*}{\leftrightarrow}$ est la relation d'équivalence engendrée par $\rightarrow$.

Propriétés importantes

Un SRA $(A, \to)$ est dit:

- Church-Rosser si pour tous $a, b \in A$ tels que $a \overset{*}{\leftrightarrow} b$, il existe $c \in A$ tel que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, two heads] & & b \arrow[dl, dotted, two heads] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

Propriétés importantes

Un SRA $(A, \rightarrow)$ est dit:

- Church-Rosser si pour tous $a, b \in A$ tels que $a \overset{*}{\leftrightarrow} b$, il existe $c \in A$ tel que

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, leftrightarrow, "*"] \arrow[dr, dotted, twoheadrightarrow] & & b \arrow[dl, dotted, twoheadrightarrow] \\
& c &
\end{tikzcd}$$

- confluent (resp. localement confluent) si pour tous $a, b, c \in A$ tels que $b \twoheadleftarrow a \twoheadrightarrow c$ (resp. $b \leftarrow a \rightarrow c$), il existe $d \in A$ tel que

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl, twoheadrightarrow] \arrow[dr, twoheadrightarrow] & \\
b \arrow[dr, dotted, twoheadrightarrow] & & c \arrow[dl, dotted, twoheadrightarrow] \\
& d &
\end{tikzcd}
\quad \text{(resp.} \quad
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
b \arrow[dr, dotted, twoheadrightarrow] & & c \arrow[dl, dotted, twoheadrightarrow] \\
& d &
\end{tikzcd}
\quad)$$

Formes normales et terminaison

- Un élément a de A est dit en forme normale pour $\rightarrow$ si il n'existe pas de b dans A tel que $a \rightarrow b$.

Formes normales et terminaison

- Un élément a de A est dit en forme normale pour $\to$ si il n'existe pas de b dans A tel que $a \to b$.
- Un élément a de A est dit fortement normalisant si toute réduction partant de a est finie. On dit que $\to$ est terminante si tout élément est fortement normalisant.

Formes normales et terminaison

- Un élément a de A est dit en forme normale pour $\rightarrow$ si il n'existe pas de b dans A tel que $a \rightarrow b$.
- Un élément a de A est dit fortement normalisant si toute réduction partant de a est finie. On dit que $\rightarrow$ est terminante si tout élément est fortement normalisant.
- Si $\rightarrow$ termine, chaque élément $a \in A$ admet au moins une forme normale.

Formes normales et terminaison

- Un élément a de A est dit en forme normale pour $\rightarrow$ si il n'existe pas de b dans A tel que $a \rightarrow b$.
- Un élément a de A est dit fortement normalisant si toute réduction partant de a est finie. On dit que $\rightarrow$ est terminante si tout élément est fortement normalisant.
- Si $\rightarrow$ termine, chaque élément $a \in A$ admet au moins une forme normale.
- On dit que $\rightarrow$ est convergent si il est à la fois confluent et terminant. Dans ce cas, chaque élément a de A admet une unique forme normale, que l'on note $\hat{a}$.

Formes normales et terminaison

- Un élément a de A est dit en forme normale pour $\rightarrow$ si il n'existe pas de b dans A tel que $a \rightarrow b$.
- Un élément a de A est dit fortement normalisant si toute réduction partant de a est finie. On dit que $\rightarrow$ est terminante si tout élément est fortement normalisant.
- Si $\rightarrow$ termine, chaque élément $a \in A$ admet au moins une forme normale.
- On dit que $\rightarrow$ est convergent si il est à la fois confluent et terminant. Dans ce cas, chaque élément a de A admet une unique forme normale, que l'on note $\hat{a}$.

Exemples

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & a' \arrow[ll, bend left] \arrow[dl] \\
& b &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c & b \arrow[l] \arrow[r] & a \arrow[r, bend left] & a' \arrow[l, bend left]
\end{tikzcd}$$

De la confluence locale à la confluence globale

Théorème (Lemme de Newman , ’42)

Un SRA $(A, \rightarrow)$ *terminant est confluent si et seulement si il est localement confluent.*

Théorème (Lemme de Newman , '42)

Un SRA $(A, \rightarrow)$ terminant est confluent si et seulement si il est localement confluent.

<u>Preuve:</u> On utilise le principe d' induction noetherienne: étant donnée une propriété $\mathcal{P}$ sur les éléments de A, alors

$$\left(\forall a \in A \ \left(\forall b \in A \ a \xrightarrow{+} b \Rightarrow \mathcal{P}(b)\right) \Rightarrow \mathcal{P}(a)\right) \Rightarrow \forall a \in A, \mathcal{P}(a)$$

$$\begin{tikzcd}
 & & a_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & a'_1 \arrow[dl, dotted, two heads] \arrow[dr, dotted, two heads] & \text{Conf. loc.} & a''_1 \arrow[dl, dotted, two heads] \arrow[dr, dotted, two heads] & \\
a' \arrow[dr, dotted, two heads] & \text{Ind.} & a_2 \arrow[dl, dotted, two heads] & & a'' \arrow[ddll, dotted, two heads] \\
 & d' \arrow[dr, dotted, two heads] & \text{Ind.} & & \\
 & & d & &
\end{tikzcd}$$

II. Réécriture de mots

Un peu de catégories

- Une $(1-)$catégorie est la donnée d'un ensemble d'objets (ou 0-cellules) et de flèches (ou 1-cellules) telles que:

Un peu de catégories

- Une $(1-)$catégorie est la donnée d'un ensemble d'objets (ou 0-cellules) et de flèches (ou 1-cellules) telles que:
    - Chaque flèche $f : A \to B$ est munie de 2 objets source (A) et but (B);
    - Etant donné $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on a une composition $g \circ f : A \to C$;
    - Pour chaque objet A, il y a une flèche $1_A : A \to A$ appelée identité de A;
    - La composition est associative et les identités sont des unités pour la composition.

Un peu de catégories

- Une $(1-)$catégorie est la donnée d'un ensemble d'objets (ou 0-cellules) et de flèches (ou 1-cellules) telles que:
  - Chaque flèche $f : A \to B$ est munie de 2 objets source (A) et but (B);
  - Etant donné $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on a une composition $g \circ f : A \to C$;
  - Pour chaque objet A, il y a une flèche $1_A : A \to A$ appelée identité de A;
  - La composition est associative et les identités sont des unités pour la composition.
- Une 2-catégorie est une catégorie telle que pour tous objets A et B, l'ensemble des flèches entre A et B est également une catégorie.

Un peu de catégories

- Une $(1-)$catégorie est la donnée d'un ensemble d'objets (ou 0-cellules) et de flèches (ou 1-cellules) telles que:
  - Chaque flèche $f : A \to B$ est munie de 2 objets source (A) et but (B);
  - Etant donné $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on a une composition $g \circ f : A \to C$;
  - Pour chaque objet A, il y a une flèche $1_A : A \to A$ appelée identité de A;
  - La composition est associative et les identités sont des unités pour la composition.
- Une 2-catégorie est une catégorie telle que pour tous objets A et B, l'ensemble des flèches entre A et B est également une catégorie.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.
- Les 1-cellules se composent comme dans une 1-catégorie.

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.
- Les 1-cellules se composent comme dans une 1-catégorie. Les 2-cellules se composent de deux manières: en $\star_0$ et en $\star_1$ comme suit

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.

- Les 1-cellules se composent comme dans une 1-catégorie. Les 2-cellules se composent de deux manières: en $\star_0$ et en $\star_1$ comme suit

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "u \star_0 v"] \arrow[r, bend right, "u' \star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & z
\end{tikzcd}
\quad ; \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=60, "w"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow g"] & y
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & y
\end{tikzcd}
$$

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.

- Les 1-cellules se composent comme dans une 1-catégorie. Les 2-cellules se composent de deux manières: en $\star_0$ et en $\star_1$ comme suit

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left=50, "v"] \arrow[r, bend right=50, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u \star_0 v"] \arrow[r, bend right=50, "u' \star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & z
\end{tikzcd}
\quad ; \quad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
{} \arrow[d, phantom, "\Downarrow f"] \\
x \arrow[r, "v"] \arrow[r, bend left=70, "u"] \arrow[r, bend right=70, "w"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow g"] & y \\
{}
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & y
\end{tikzcd}
$$

- Ces conditions satisfont la relation d'échange, c'est à dire pour toute situation

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "u'"] \arrow[r, bend left=60, "u"] \arrow[r, bend right=60, "u''"'] & y \arrow[r, "v'"] \arrow[r, bend left=60, "v"] \arrow[r, bend right=60, "v''"'] & z
\end{tikzcd}
\qquad \text{avec } \Downarrow f : u \Rightarrow u',\ \Downarrow f' : u' \Rightarrow u'',\ \Downarrow g : v \Rightarrow v',\ \Downarrow g' : v' \Rightarrow v''
$$

on a l'égalité

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.

- Les 1-cellules se composent comme dans une 1-catégorie. Les 2-cellules se composent de deux manières: en $\star_0$ et en $\star_1$ comme suit

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u \star_0 v"] \arrow[r, bend right, "u' \star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & z \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=60, "w"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow g"] & y \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & y \end{tikzcd}$$

- Ces conditions satisfont la relation d'échange, c'est à dire pour toute situation

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "u"] \arrow[r, "u'" description] \arrow[r, bend right=60, "u''"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow f'"] & y \arrow[r, bend left=60, "v"] \arrow[r, "v'" description] \arrow[r, bend right=60, "v''"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow g"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow g'"] & z \end{tikzcd}$$

  on a l'égalité

$$(f \star_0 g) \star_1 (f' \star_0 g') = (f \star_1 f') \star_0 (g \star_1 g').$$

Un peu de catégories

- Une 2-catégorie est munie de 0-cellules, de 1-cellules et de 2-cellules.
- Les 1-cellules se composent comme dans une 1-catégorie. Les 2-cellules se composent de deux manières: en $\star_0$ et en $\star_1$ comme suit

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left=50, "v"] \arrow[r, bend right=50, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "u \star_0 v"] \arrow[r, bend right=50, "u' \star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & z \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd}[column sep=large] x \arrow[r, bend left=70, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=70, "w"'] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow g"] & y \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & y \end{tikzcd}$$

- Ces conditions satisfont la relation d'échange, c'est à dire pour toute situation

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] x \arrow[r, bend left=70, "u"] \arrow[r, "u'" description] \arrow[r, bend right=70, "u''"'] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow f'"] & y \arrow[r, bend left=70, "v"] \arrow[r, "v'" description] \arrow[r, bend right=70, "v''"'] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow g"] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow g'"] & z \end{tikzcd}$$

  on a l'égalité

$$(f \star_0 g) \star_1 (f' \star_0 g') = (f \star_1 f') \star_0 (g \star_1 g').$$

  Ces compositions satisfont des axiomes d'associativité et d'identité.

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.
- On construit R^* la $(2, 1)$-catégorie libre engendrée par R comme suit:

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.
- On construit R^* la $(2,1)$-catégorie libre engendrée par R comme suit:
  - R^* a une unique 0-cellule $*$;

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.
- On construit R^* la $(2, 1)$-catégorie libre engendrée par R comme suit:
  - R^* a une unique 0-cellule $*$;
  - Les 1-cellules de R^* sont les éléments de X^*;

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.
- On construit R^* la $(2,1)$-catégorie libre engendrée par R comme suit:
  - R^* a une unique 0-cellule $*$;
  - Les 1-cellules de R^* sont les éléments de X^*;
  - Les 2-cellules de R^* sont les $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_n$ où chaque $a_i \to a_{i+1}$ est un élément de R, constituant les chemins de réécriture.

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.
- On construit R^* la $(2, 1)$-catégorie libre engendrée par R comme suit:
  - R^* a une unique 0-cellule $*$;
  - Les 1-cellules de R^* sont les éléments de X^*;
  - Les 2-cellules de R^* sont les $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_n$ où chaque $a_i \to a_{i+1}$ est un élément de R, constituant les chemins de réécriture.
- La composition $\star_0$ de R^* est la juxtaposition des mots en X, et la composition $\star_1$ est la composition séquentielle de réécritures.

Systèmes de réécriture de mots

- Un système de réécriture de mots (SRM) est un couple (X, R) où X est un ensemble de générateurs et R est une relation binaire sur X^* le monoïde libre engendré par X.
- $R \subset X^* \times X^*$ est appelé ensemble de relations. Ces relations constituent les règles de réécriture.
- On construit R^* la $(2, 1)$-catégorie libre engendrée par R comme suit:
  - R^* a une unique 0-cellule $*$;
  - Les 1-cellules de R^* sont les éléments de X^*;
  - Les 2-cellules de R^* sont les $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$ où chaque $a_i \to a_{i+1}$ est un élément de R, constituant les chemins de réécriture.
- La composition $\star_0$ de R^* est la juxtaposition des mots en X, et la composition $\star_1$ est la composition séquentielle de réécritures.

- Une étape de réécriture est une 2-cellule de R^* de la forme

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "u"] & y \arrow[r, bend left, "s_1(f)"] \arrow[r, bend right, "t_1(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & z \arrow[r, "v"] & t \end{tikzcd}$$

où $f : u \to v$ est dans R. On la notera ufv.

Décidabilité du problème du mot

- X^* muni des étapes de réécriture forme un SRA et présente le monoïde $M = X^* / \overset{R}{\Leftrightarrow}$, c'est à dire on a $u = v$ dans M si et seulement si $\overline{u} \overset{R}{\Leftrightarrow} \overline{v}$ dans X^* pour des représentants $\overline{u}$ et $\overline{v}$ de u et v dans X^*.

Décidabilité du problème du mot

- X^* muni des étapes de réécriture forme un SRA et présente le monoïde $M = X^* / \overset{R}{\Leftrightarrow}$, c'est à dire on a $u = v$ dans M si et seulement si $\overline{u} \overset{R}{\Leftrightarrow} \overline{v}$ dans X^* pour des représentants $\overline{u}$ et $\overline{v}$ de u et v dans X^*.

- *Problème du mot:* on a 2 mots u et v dans X^*, est-ce que $u \overset{R}{\Leftrightarrow} v$?

Décidabilité du problème du mot

- X^* muni des étapes de réécriture forme un SRA et présente le monoïde $M = X^* / \overset{R}{\Leftrightarrow}$, c'est à dire on a $u = v$ dans M si et seulement si $\overline{u} \overset{R}{\Leftrightarrow} \overline{v}$ dans X^* pour des représentants $\overline{u}$ et $\overline{v}$ de u et v dans X^*.

- *Problème du mot:* on a 2 mots u et v dans X^*, est-ce que $u \overset{R}{\Leftrightarrow} v$?

- *Réponse partielle:* si le SRM est convergent, on peut décider ce problème grâce à l'algorithme de la forme normale.

Décidabilité du problème du mot

- X^* muni des étapes de réécriture forme un SRA et présente le monoïde $M = X^* / \overset{R}{\Leftrightarrow}$, c'est à dire on a $u = v$ dans M si et seulement si $\overline{u} \overset{R}{\Leftrightarrow} \overline{v}$ dans X^* pour des représentants $\overline{u}$ et $\overline{v}$ de u et v dans X^*.
- *Problème du mot:* on a 2 mots u et v dans X^*, est-ce que $u \overset{R}{\Leftrightarrow} v$?
- *Réponse partielle:* si le SRM est convergent, on peut décider ce problème grâce à l'algorithme de la forme normale.

Input : 2 éléments u et v de X^*
Result: Booléen $u \overset{R}{\Leftrightarrow} v$?
On réduit u en $\hat{u}$;
On réduit v en $\hat{v}$;
if $\hat{u} = \hat{v}$ **then**
  Vrai
else
  Faux
end

Branchements

- Un branchement (resp. branchement local) de (X, R) est

$$\begin{tikzcd} & v \\ u \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "g"'] & \\ & w \end{tikzcd}$$

où f et g sont des chemins de réécriture (resp. des étapes de réécriture) et u, v, w des éléments de X^*.

Branchements

- Un branchement (resp. branchement local) de (X, R) est où f et g sont des chemins de réécriture (resp. des étapes de réécriture) et u, v, w des éléments de X^*.

$$\begin{tikzcd}
 & v \arrow[dr, Rightarrow, bend left, "f'"] & \\
u \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "g"'] & & u' \\
 & w \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

- Un branchement est dit confluent si on peut fermer le diagramme par des chemins de réécriture.

Branchements

- Un branchement (resp. branchement local) de (X, R) est où f et g sont des chemins de réécriture (resp. des étapes de réécriture) et u, v, w des éléments de X^*.

$$\begin{tikzcd}
 & v \arrow[dr, Rightarrow, bend left, "f'"] & \\
u \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "g"'] & & u' \\
 & w \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

- Un branchement est dit confluent si on peut fermer le diagramme par des chemins de réécriture.
- Les branchements locaux sont divisés en 3 familles:

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, Rightarrow, bend left, "f"] \arrow[r, Rightarrow, bend right, "f"'] & v
\end{tikzcd}$$

Asphériques

$$\begin{tikzcd}
 & u'v \\
uv \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "fv"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "ug"'] & \\
 & uv'
\end{tikzcd}$$

Peiffer

$\cdots$

Chevauchements

Branchements critiques

- Les branchements locaux sont comparés par l'ordre $\sqsubseteq$ engendré par les relations $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$. On appelle branchement critique tout branchement local minimal pour cet ordre.

Branchements critiques

- Les branchements locaux sont comparés par l'ordre $\sqsubseteq$ engendré par les relations $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$. On appelle branchement critique tout branchement local minimal pour cet ordre.

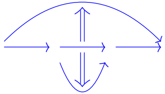
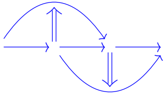
- Il y a deux formes possibles de branchements critiques:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[rrr, bend left=50] & {} \arrow[r] \arrow[r, bend right=70] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow"] & {} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[rr, bend left=50] & {} \arrow[r] \arrow[rr, bend right=50] \arrow[phantom, from=1-1, to=1-3, shift left=3ex, "\Uparrow"] \arrow[phantom, from=1-2, to=1-4, shift right=3ex, "\Downarrow"] & {} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
.
$$

Branchements critiques

- Les branchements locaux sont comparés par l'ordre $\sqsubseteq$ engendré par les relations $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$. On appelle branchement critique tout branchement local minimal pour cet ordre.

- Il y a deux formes possibles de branchements critiques:

 et  .

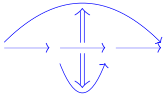
Théorème (Lemme des paires critiques)

Un SRM (X, R) est localement confluent si et seulement si tous les branchements critiques sont confluents.

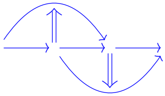
Branchements critiques

- Les branchements locaux sont comparés par l'ordre $\sqsubseteq$ engendré par les relations $(f,g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$. On appelle branchement critique tout branchement local minimal pour cet ordre.

- Il y a deux formes possibles de branchements critiques:



et



.

Théorème (Lemme des paires critiques)

Un SRM (X,R) est localement confluent si et seulement si tous les branchements critiques sont confluents.

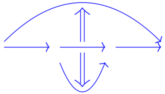
La preuve se fait par étude de cas: les asphériques et Peiffer sont toujours confluents.

$$
\begin{tikzcd}
 & v \arrow[dr, Rightarrow, "1_v"] & \\
u \arrow[ur, Rightarrow, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, "f"'] & & v \\
 & v \arrow[ur, Rightarrow, "1_v"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & u'v \arrow[dr, Rightarrow, "u'g"] & \\
uv \arrow[ur, Rightarrow, "fv"] \arrow[dr, Rightarrow, "ug"'] & & u'v' \\
 & uv' \arrow[ur, Rightarrow, "fv'"'] &
\end{tikzcd}
$$

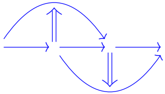
Branchements critiques

- Les branchements locaux sont comparés par l'ordre $\sqsubseteq$ engendré par les relations $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$. On appelle branchement critique tout branchement local minimal pour cet ordre.

- Il y a deux formes possibles de branchements critiques:



et



.

Théorème (Lemme des paires critiques)

Un SRM (X, R) est localement confluent si et seulement si tous les branchements critiques sont confluents.

La preuve se fait par étude de cas: les asphériques et Peiffer sont toujours confluents. Pour les autres branchements locaux (f, g), il existe (h, k) tel que $f = uhv$ et $g = ukv$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & v \arrow[dr, Rightarrow, "1_v"] & \\ u \arrow[ur, Rightarrow, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, "f"'] & & v \\ & v \arrow[ur, Rightarrow, "1_v"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & u'v \arrow[dr, Rightarrow, "u'g"] & \\ uv \arrow[ur, Rightarrow, "fv"] \arrow[dr, Rightarrow, "ug"'] & & u'v' \\ & uv' \arrow[ur, Rightarrow, "fv'"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[dr, Rightarrow, "h'"] & \\ w \arrow[ur, Rightarrow, "h"] \arrow[dr, Rightarrow, "k"'] & & w' \\ & y \arrow[ur, Rightarrow, "k'"'] & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd}[column sep=small] & uxv \arrow[dr, Rightarrow, "uh'v"] & \\ uwv \arrow[ur, Rightarrow, "f = uhv"] \arrow[dr, Rightarrow, "g = ukv"'] & & uw'v \\ & uyv \arrow[ur, Rightarrow, "uk'v"'] & \end{tikzcd}$$

Exemples

Exemple. On considère $X = \{a\}$ et $R = \{aa \overset{\alpha}{\Rightarrow} 1\}$.

Exemples

Exemple. On considère $X = \{a\}$ et $R = \{aa \overset{\alpha}{\Rightarrow} 1\}$.

- Il termine car le nombre de a diminue strictement.

Exemples

Exemple. On considère $X = \{a\}$ et $R = \{aa \overset{\alpha}{\Rightarrow} 1\}$.

- Il termine car le nombre de a diminue strictement.

- Il a une unique paire critique qui est confluente, donc est confluent.

$$\begin{tikzcd}
 & a \\
\underline{a\overline{a}}\overline{a} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "a\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha a"'] & \\
 & a
\end{tikzcd}$$

Exemples

Exemple. On considère $X = \{a\}$ et $R = \{aa \overset{\alpha}{\Rightarrow} 1\}$.

- Il termine car le nombre de a diminue strictement.
- Il a une unique paire critique qui est confluente, donc est confluent.

$$\begin{tikzcd}
 & a \\
\underline{a\overline{a}}\overline{a} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "a\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha a"'] & \\
 & a
\end{tikzcd}$$

Exemple. On considère $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$.

Exemples

Exemple. On considère $X = \{a\}$ et $R = \{aa \overset{\alpha}{\Rightarrow} 1\}$.

- Il termine car le nombre de a diminue strictement.
- Il a une unique paire critique qui est confluente, donc est confluent.

$$
\begin{tikzcd}
 & a \\
\underline{a\overline{a}}\overline{a} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "a\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha a"'] & \\
 & a
\end{tikzcd}
$$

Exemple. On considère $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$.

- Il termine avec un ordre lexicographique donné par $s > t$.

Exemples

Exemple. On considère $X = \{a\}$ et $R = \{aa \overset{\alpha}{\Rightarrow} 1\}$.

- Il termine car le nombre de a diminue strictement.
- Il a une unique paire critique qui est confluente, donc est confluent.

$$\begin{tikzcd}
 & a \\
\underline{a\overline{a}}\overline{a} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "a\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha a"'] & \\
 & a
\end{tikzcd}$$

Exemple. On considère $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$.

- Il termine avec un ordre lexicographique donné par $s > t$.
- Il a une paire critique qui est non confluente

$$\begin{tikzcd}
 & sttst \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Input : Un SRM (X, R) terminant et un ordre de terminaison $>$

$\mathcal{KB}(R) := R$;

$\mathcal{C}_b :=$ {branchements critiques de (X,R)} ;

while $\mathcal{C}_b \neq \emptyset$ **do**

  On choisit $(f : u \Rightarrow v, g : u \Rightarrow w)$ dans $\mathcal{C}_b$;

  $\mathcal{C}_b := \mathcal{C}_b \backslash \{(f, g)\}$;

  On réduit v en $\hat{v}$ pour R ;

  On réduit w en $\hat{w}$ pour R ;

  if $\hat{v} \neq \hat{w}$ **then**

    if $\hat{v} > \hat{w}$ **then**

      $\mathcal{KB}(R) := \mathcal{KB}(R) \cup \{\alpha : \hat{v} \Rightarrow \hat{w}\}$

    else

      $\mathcal{KB}(R) := \mathcal{KB}(R) \cup \{\alpha : \hat{w} \Rightarrow \hat{v}\}$

    end

  else

  end

  $\mathcal{C}_b := \mathcal{C}_b \cup$ {branchements critiques générés par α}

end

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$
\begin{tikzcd}
 & sttst \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}
$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$\begin{tikzcd}
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\beta"] \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$\begin{tikzcd}
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, "\beta"] \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}$$

$$\underline{stt\overline{s}}\overline{ts}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$
\begin{tikzcd}
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\beta"] & & & stttst \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha ts"'] & & & \underline{stt\overline{st}}\overline{s} \arrow[ur, Rightarrow, "stt\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta s"'] & \\
 & tstts & & & tsttss
\end{tikzcd}
$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$
\begin{tikzcd}
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\beta"] \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & stttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\gamma"] \\
\underline{stt\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "stt\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta s"'] & \\
 & tsttss
\end{tikzcd}
$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$\begin{tikzcd}
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\beta"] \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & stttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\gamma"] \\
\underline{stt\overline{st}}\overline{s} \arrow[ur, Rightarrow, "stt\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta s"'] & \\
 & tsttss
\end{tikzcd}
\qquad
\underline{stt\overline{st}}\overline{tst}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$
\begin{tikzcd}
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\beta"] \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & stttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\gamma"] \\
\underline{stt\overline{st}}\overline{s} \arrow[ur, Rightarrow, "stt\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta s"'] & \\
 & tsttss
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & stttstts \\
\underline{stt\overline{st}}\overline{tst} \arrow[ur, Rightarrow, "\beta tst"] \arrow[dr, Rightarrow, "stt\beta"'] & \\
 & tsttstst
\end{tikzcd}
$$

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, "\beta"] \\
\underline{st}\underline{\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & stttst \arrow[dd, Rightarrow, "\gamma"] \\
\underline{stt}\underline{\overline{st}}\overline{s} \arrow[ur, Rightarrow, "stt\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta s"'] & \\
 & tsttss
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & stttstts \arrow[dr, Rightarrow, "\beta ts"] & \\
\underline{stts}\underline{\overline{t}}\overline{tst} \arrow[ur, Rightarrow, "\beta tst"] \arrow[dr, Rightarrow, "stt\beta"'] & & tsttssts \arrow[dl, Rightarrow, "tstts\alpha"] \\
 & tsttstst &
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Cet algorithme peut ne pas terminer. Si il termine, il renvoie un SRM (X, R) convergent qui présente le même monoïde.

Exemple. Pour $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \overset{\alpha}{\Rightarrow} tst\}$ avec $>$ ordre lexicographique pour $s > t$,

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & sttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\beta"] \\
\underline{st\overline{s}}\overline{ts} \arrow[ur, Rightarrow, "st\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\alpha ts"'] & \\
 & tstts
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & stttst \arrow[dd, Rightarrow, bend left, "\gamma"] \\
\underline{stt\overline{st}}\overline{s} \arrow[ur, Rightarrow, "stt\alpha"] \arrow[dr, Rightarrow, "\beta s"'] & \\
 & tsttss
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & stttstts \arrow[dr, Rightarrow, "\beta ts"] & \\
\underline{stt\overline{st}}\overline{tst} \arrow[ur, Rightarrow, "\beta tst"] \arrow[dr, Rightarrow, "stt\beta"'] & & tsttssts \arrow[dl, Rightarrow, "tstts\alpha"] \\
 & tsttstst &
\end{tikzcd}
\qquad \ldots
$$

Théorème (Kapur & Narendran , '85)

Le monoïde B_3^+ présenté par ce SRM n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs.

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \ , \ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "s\alpha"'] & \\
 & sas
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \ , \ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

$$\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, "s\alpha"'] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

$$
\begin{tikzcd}
 & aa & & & aat \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "s\alpha"'] & & & sast \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\beta"'] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\gamma"'] & & & saa
\end{tikzcd}
$$

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \ , \ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

$$\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, "s\alpha"'] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aat \\
sast \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\beta"'] & \\
 & saa \arrow[uu, Rightarrow, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \ , \ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

$$\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "s\alpha"'] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aat \\
sast \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\beta"'] & \\
 & saa \arrow[uu, Rightarrow, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & aaas & \\
sasas \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma as"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\gamma"'] & & aata \arrow[ul, Rightarrow, bend right, "aa\alpha"'] \\
 & saaa \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "\delta a"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaaa & aaast \arrow[l, Rightarrow, "aaa\beta"'] \\
sasaa \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma aa"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\delta"'] & & \\
 & saaat \arrow[r, Rightarrow, "\delta at"'] & aatat \arrow[uu, Rightarrow, "aa\alpha t"']
\end{tikzcd}$$

Complétion de Knuth-Bendix

Si on ajoute un nouveau générateur $a = st$, le monoïde B_3^+ est présenté par le SRM $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\}$. On prend pour ordre de terminaison l'ordre lexicographique pour $s > t > a$.

$$
\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "s\alpha"'] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aat \\
sast \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\beta"'] & \\
 & saa \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaas & \\
sasas \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma as"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\gamma"'] & & aata \arrow[ul, Rightarrow, bend right, "aa\alpha"'] \\
 & saaa \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "\delta a"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaaa & aaast \arrow[l, Rightarrow, "aaa\beta"'] \\
sasaa \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma aa"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\delta"'] & & \\
 & saaat \arrow[r, Rightarrow, "\delta at"'] & aatat \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "aa\alpha t"']
\end{tikzcd}
$$

Le SRM $< s, t, a \mid ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\ ,\ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa\ ,\ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat\ >$ est une présentation convergente du monoïde des tresses à 3 brins.

III. Bases d'homotopie et finitude homologique

Bases d'homotopie et cohérence

- Soit (X, R) un SRM et $R^\top$ la $(2,1)$-catégorie libre engendrée par R, c'est à dire R^* avec des inverses formels pour chaque 2-cellule. Une 2-sphère de $R^\top$ est un couple (f, g) de 2-cellules parallèles dans $R^\top$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "u"] \arrow[rr, bend right=50, "u'"'] \arrow[r, phantom, "f\Downarrow"] & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow f'"] & y \end{tikzcd}$$

Bases d'homotopie et cohérence

- Soit (X, R) un SRM et $R^\top$ la $(2,1)$-catégorie libre engendrée par R, c'est à dire R^* avec des inverses formels pour chaque 2-cellule. Une 2-sphère de $R^\top$ est un couple (f, g) de 2-cellules parallèles dans $R^\top$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "u'"'] \arrow[r, phantom, "f\Downarrow \;\Rrightarrow\; \Downarrow f'"] & y \end{tikzcd}$$

- Une extension cellulaire de R^* est un ensemble Γ de 3-cellules muni d'une application $\Gamma \to 2\text{-Sph}(R)$.

Bases d'homotopie et cohérence

- Soit (X, R) un SRM et $R^{\top}$ la $(2,1)$-catégorie libre engendrée par R, c'est à dire R^* avec des inverses formels pour chaque 2-cellule. Une 2-sphère de $R^{\top}$ est un couple (f, g) de 2-cellules parallèles dans $R^{\top}$.

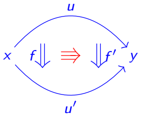
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "u"] \arrow[r, bend right=60, "u'"'] \arrow[r, phantom, "f\Downarrow \; \Rrightarrow \; \Downarrow f'"] & y \end{tikzcd}$$

- Une extension cellulaire de R^* est un ensemble Γ de 3-cellules muni d'une application $\Gamma \to 2\text{-Sph}(\mathrm{R})$.

- Une telle extension Γ est appelée base d'homotopie si toutes les 2-sphères de $R^{\top}$ peuvent être remplies par des compositions $\star_0$, $\star_1$ et $\star_2$ d'éléments de Γ et leurs inverses formels.

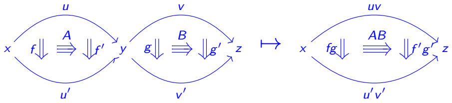
Bases d'homotopie et cohérence

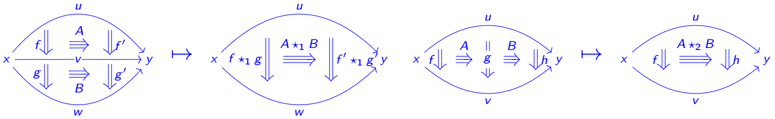
- Soit (X, R) un SRM et $R^\top$ la $(2,1)$-catégorie libre engendrée par R, c'est à dire R^* avec des inverses formels pour chaque 2-cellule. Une 2-sphère de $R^\top$ est un couple (f, g) de 2-cellules parallèles dans $R^\top$.



- Une extension cellulaire de R^* est un ensemble Γ de 3-cellules muni d'une application $\Gamma \to 2\text{-Sph(R)}$.

- Une telle extension Γ est appelée base d'homotopie si toutes les 2-sphères de $R^\top$ peuvent être remplies par des compositions $\star_0$, $\star_1$ et $\star_2$ d'éléments de Γ et leurs inverses formels.





Cohérence et théorème de Squier

- Une présentation cohérente d'un monoïde M est un triplet (X, R, Γ) où (X, R) est un SRM **convergent** qui présente M et Γ une base d'homotopie de $\Gamma^{\top}$.

Cohérence et théorème de Squier

- Une présentation cohérente d'un monoïde M est un triplet (X, R, Γ) où (X, R) est un SRM **convergent** qui présente M et Γ une base d'homotopie de $\Gamma^\top$.

- Une complétion de Squier d'un SRM convergent (X, R) est un triplet (X, R, Γ) où Γ est constitué des 3-cellules

$$\begin{tikzcd} & u' \arrow[dr, Rightarrow, bend left, "f'"] & \\ u \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow A_{f,g}"] & & u' \\ & v \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

  pour chaque paire critique (f, g) et un choix de confluence (f', g') fixé.

Cohérence et théorème de Squier

- Une présentation cohérente d'un monoïde M est un triplet (X, R, Γ) où (X, R) est un SRM **convergent** qui présente M et Γ une base d'homotopie de $\Gamma^\top$.

- Une complétion de Squier d'un SRM convergent (X, R) est un triplet (X, R, Γ) où Γ est constitué des 3-cellules

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & u' \arrow[dr, Rightarrow, bend left, "f'"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow A_{f,g}"] & \\
u \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "f"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "g"'] & & u' \\
 & v \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

pour chaque paire critique (f, g) et un choix de confluence (f', g') fixé.

Théorème (Théorème de Squier , '94)

Si (X, R) est un SRM convergent, alors une complétion de Squier de (X, R) est une présentation cohérente du monoïde $M = X^*/R$.

Exemple de B_3^+

- On reprend $< s, t, a \mid ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \ , \ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a \ , \ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa \ , \ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat \ >$.

Exemple de B_3^+

- On reprend $< s, t, a \mid ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\ ,\ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa\ ,\ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat\ >$.

- Il y avait 4 paires critiques:

$$\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, "s\alpha"'] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aat \\
sast \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\beta"'] & \\
 & saa \arrow[uu, Rightarrow, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaas & \\
sasas \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma as"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\gamma"'] & & aata \arrow[ul, Rightarrow, "aa\alpha"'] \\
 & saaa \arrow[ur, Rightarrow, "\delta a"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaaa & aaast \arrow[l, Rightarrow, "aaa\beta"'] \\
sasaa \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma aa"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\delta"'] & & \\
 & saaat \arrow[r, Rightarrow, "\delta at"'] & aatat \arrow[uu, Rightarrow, "aa\alpha t"']
\end{tikzcd}$$

Exemple de B_3^+

- On reprend $< s, t, a \mid ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \;,\; st \overset{\beta}{\Rightarrow} a \;,\; sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa \;,\; saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat \;>$.
- Il y avait 4 paires critiques:

$$
\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, "s\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow A"] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aat \\
sast \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\beta"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow B"] & \\
 & saa \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaas & \\
sasas \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma as"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\gamma"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow C"] & & aata \arrow[ul, Rightarrow, "aa\alpha"'] \\
 & saaa \arrow[ur, Rightarrow, "\delta a"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaaa & aaast \arrow[l, Rightarrow, "aaa\beta"'] \\
sasaa \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma aa"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\delta"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow D"] & & \\
 & saaat \arrow[r, Rightarrow, "\delta at"'] & aatat \arrow[uu, Rightarrow, "aa\alpha t"']
\end{tikzcd}
$$

- $\langle s, t, a \;;\; ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \,,\, st \overset{\beta}{\Rightarrow} a \,,\, sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa \,,\, saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat \;;\; A, B, C, D \rangle$ est une présentation cohérente de B_3^+.

Exemple de B_3^+

- On reprend $< s, t, a \mid ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\ ,\ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa\ ,\ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat\ >$.

- Il y avait 4 paires critiques:

$$
\begin{tikzcd}
 & aa \\
sta \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "s\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow A"] & \\
 & sas \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aat \\
sast \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\beta"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow B"] & \\
 & saa \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\delta"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & aaas & \\
sasas \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma as"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\gamma"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow C"] & & aata \arrow[ul, Rightarrow, bend right, "aa\alpha"'] \\
 & saaa \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "\delta a"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & aaaa & aaast \arrow[l, Rightarrow, "aaa\beta"'] \\
sasaa \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma aa"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "sa\delta"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow D"] & & \\
 & saaat \arrow[r, Rightarrow, "\delta at"'] & aatat \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "aa\alpha t"']
\end{tikzcd}
$$

- $\langle s, t, a\ ;\ ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\ ,\ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa\ ,\ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat\ ;\ A, B, C, D \rangle$ est une présentation cohérente de B_3^+.

- On peut enlever des 3-cellules "redondantes" en trouvant des relations entre les 3-cellules. Pour B_3^+, on peut se ramener à une base d'homotopie vide.

Exemple de B_3^+

- On reprend $< s, t, a \mid ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\ ,\ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa\ ,\ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat\ >$.

- Il y avait 4 paires critiques:

$$\begin{tikzcd} & aa \\ sta \arrow[ur, Rightarrow, "\beta a"] \arrow[dr, Rightarrow, "s\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow A"] & \\ & sas \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & aat \\ sast \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma t"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\beta"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow B"] & \\ & saa \arrow[uu, Rightarrow, "\delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & aaas & \\ sasas \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma as"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\gamma"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow C"] & & aata \arrow[ul, Rightarrow, "aa\alpha"'] \\ & saaa \arrow[ur, Rightarrow, "\delta a"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & aaaa & aaast \arrow[l, Rightarrow, "aaa\beta"'] \\ sasaa \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma aa"] \arrow[dr, Rightarrow, "sa\delta"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow D"] & & \\ & saaat \arrow[r, Rightarrow, "\delta at"'] & aatat \arrow[uu, Rightarrow, "aa\alpha t"'] \end{tikzcd}$$

- $\langle s, t, a\ ;\ ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as\ ,\ st \overset{\beta}{\Rightarrow} a\ ,\ sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa\ ,\ saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat\ ;\ A, B, C, D\rangle$ est une présentation cohérente de B_3^+.

- On peut enlever des 3-cellules "redondantes" en trouvant des relations entre les 3-cellules. Pour B_3^+, on peut se ramener à une base d'homotopie vide.

Résolution de monoïdes et homologie

- Soit M un monoïde, $\mathbb{Z}M$ l'anneau du monoïde et (X, R, Γ) une présentation cohérente de M.

Résolution de monoïdes et homologie

- Soit M un monoïde, $\mathbb{Z}M$ l'anneau du monoïde et (X, R, Γ) une présentation cohérente de M.

- On peut construire une résolution libre partielle de longueur 3 du $\mathbb{Z}M$-module trivial $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}M[\Gamma] \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}M[R] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}M[X] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}M \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  où:

  - $\mathbb{Z}M[-]$ est le $\mathbb{Z}M$-module à gauche libre sur $-$;
  - Les d_i sont des applications de bord ($d_{i+1} \circ d_i = 0$ pour $i = 1, 2$ et $d_1 \circ \varepsilon = 0$) et ces applications sont construites à partir des 2-cellules de R^* et des 3-cellules de Γ.

Résolution de monoïdes et homologie

- Soit M un monoïde, $\mathbb{Z}M$ l'anneau du monoïde et (X, R, Γ) une présentation cohérente de M.

- On peut construire une résolution libre partielle de longueur 3 du $\mathbb{Z}M$-module trivial $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}M[\Gamma] \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}M[R] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}M[X] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}M \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  où:

  - $\mathbb{Z}M[-]$ est le $\mathbb{Z}M$-module à gauche libre sur $-$;
  - Les d_i sont des applications de bord ($d_{i+1} \circ d_i = 0$ pour $i = 1, 2$ et $d_1 \circ \varepsilon = 0$) et ces applications sont construites à partir des 2-cellules de R^* et des 3-cellules de Γ.

- On dit alors que M est de type homologique FP_3 à gauche.

Résolution de monoïdes et homologie

- Soit M un monoïde, $\mathbb{Z}M$ l'anneau du monoïde et (X, R, Γ) une présentation cohérente de M.

- On peut construire une résolution libre partielle de longueur 3 du $\mathbb{Z}M$-module trivial $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}M[\Gamma] \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}M[R] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}M[X] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}M \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  où:
  - $\mathbb{Z}M[-]$ est le $\mathbb{Z}M$-module à gauche libre sur $-$;
  - Les d_i sont des applications de bord ($d_{i+1} \circ d_i = 0$ pour $i = 1, 2$ et $d_1 \circ \varepsilon = 0$) et ces applications sont construites à partir des 2-cellules de R^* et des 3-cellules de Γ.

- On dit alors que M est de type homologique FP_3 à gauche.

- En particulier, si on a une présentation convergente finie, alors Γ est fini et on prouve que $H_3(M, \mathbb{Z})$ est finiment engendré.

Dans les dimensions supérieures

- On peut généraliser ce processus de pavage des 2-sphères en dimension supérieure et construire des résolutions plus longues.

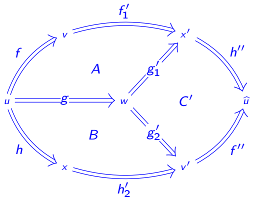
Dans les dimensions supérieures

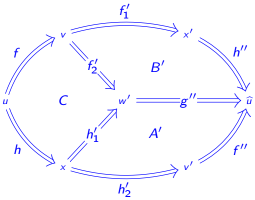
- On peut généraliser ce processus de pavage des 2-sphères en dimension supérieure et construire des résolutions plus longues.

- Par exemple, pour paver des 3-sphères on regarde les triples paires critiques (chevauchements minimaux de 3 règles), pour lesquelles il existe 2 manières de paver avec des 3-cellules:

Dans les dimensions supérieures

- On peut généraliser ce processus de pavage des 2-sphères en dimension supérieure et construire des résolutions plus longues.
- Par exemple, pour paver des 3-sphères on regarde les triples paires critiques (chevauchements minimaux de 3 règles), pour lesquelles il existe 2 manières de paver avec des 3-cellules:

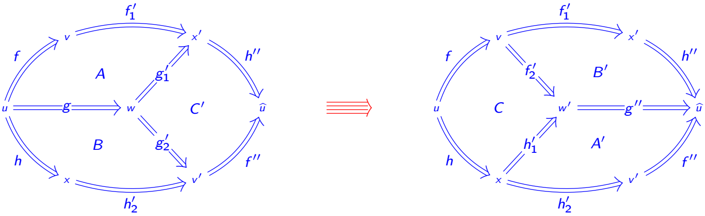




Dans les dimensions supérieures

- On peut généraliser ce processus de pavage des 2-sphères en dimension supérieure et construire des résolutions plus longues.

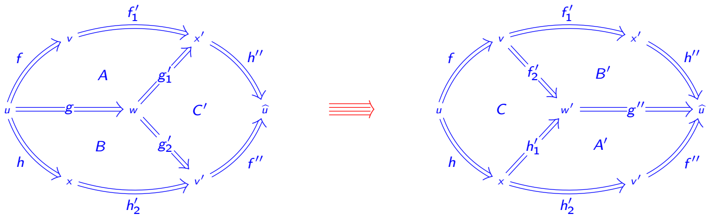
- Par exemple, pour paver des 3-sphères on regarde les triples paires critiques (chevauchements minimaux de 3 règles), pour lesquelles il existe 2 manières de paver avec des 3-cellules:



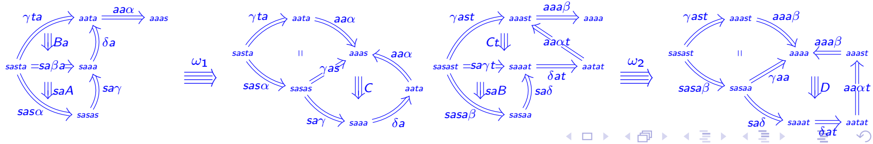
Dans les dimensions supérieures

- On peut généraliser ce processus de pavage des 2-sphères en dimension supérieure et construire des résolutions plus longues.

- Par exemple, pour paver des 3-sphères on regarde les triples paires critiques (chevauchements minimaux de 3 règles), pour lesquelles il existe 2 manières de paver avec des 3-cellules:



Exemple. Avec $B_3^+ = \langle s, t, a \; ; \; ta \overset{\alpha}{\Rightarrow} as \, , \, st \overset{\beta}{\Rightarrow} a \, , \, sas \overset{\gamma}{\Rightarrow} aa \, , \, saa \overset{\delta}{\Rightarrow} aat \; ; \; A, B, C, D \rangle$,



IV. Nouveaux thèmes de recherche

Réécriture dans des groupes

- Il existe une approche "monoïde" de réécriture de groupe: soit $< X \mid R >$ une présentation de groupe, on étudie le SRM

$$(X \sqcup \overline{X}, R \cup \{ss^{-1} \Rightarrow 1,\ s^{-1}s \Rightarrow 1\}_{s \in X}\ )$$

Réécriture dans des groupes

- Il existe une approche "monoïde" de réécriture de groupe: soit $< X \mid R >$ une présentation de groupe, on étudie le SRM

$$(X \sqcup \overline{X}, R \cup \{ss^{-1} \Rightarrow 1,\ s^{-1}s \Rightarrow 1\}_{s \in X}\ )$$

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dd, equal] \\ ss^{-1}s \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & \\ & s \end{tikzcd}$$

Réécriture dans des groupes

- Il existe une approche "monoïde" de réécriture de groupe: soit $< X \mid R >$ une présentation de groupe, on étudie le SRM

$$(X \sqcup \overline{X}, R \cup \{ss^{-1} \Rightarrow 1,\ s^{-1}s \Rightarrow 1\}_{s \in X}\ )$$

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[dd, equal] \\
ss^{-1}s \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & s
\end{tikzcd}$$

Pas satisfaisant !

- Si on cherche à réécrire dans le groupe libre (on identifie les ss^{-1} et 1), on doit définir des étapes de réécriture de la forme

$$uru^{-1}v \Rightarrow v \quad \text{si} \quad \ell(uru^{-1}v) > \ell(v)$$
$$v \Rightarrow uru^{-1}v \quad \text{si} \quad \ell(v) > \ell(uru^{-1}v)$$

Réécriture dans des groupes

- Il existe une approche "monoïde" de réécriture de groupe: soit $< X \mid R >$ une présentation de groupe, on étudie le SRM

$$(X \sqcup \overline{X}, R \cup \{ss^{-1} \Rightarrow 1,\ s^{-1}s \Rightarrow 1\}_{s \in X}\ )$$

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[dd, dash, dashed, Leftrightarrow] \\
ss^{-1}s \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & \\
 & s
\end{tikzcd}$$

Pas satisfaisant !

- Si on cherche à réécrire dans le groupe libre (on identifie les ss^{-1} et 1), on doit définir des étapes de réécriture de la forme

$$uru^{-1}v \Rightarrow v \quad \text{si} \quad \ell(uru^{-1}v) > \ell(v)$$
$$v \Rightarrow uru^{-1}v \quad \text{si} \quad \ell(v) > \ell(uru^{-1}v)$$

$$\begin{tikzcd}
 & u'v \arrow[dr, Rightarrow, "u'g"] & & & & u'vw & \\
uv \arrow[ur, Rightarrow, "fv"] \arrow[dr, Rightarrow, "ug"'] & & u'v' & \rightsquigarrow & uvw \arrow[ur, Rightarrow, "fvw"] \arrow[dr, Rightarrow, "ugw"'] & & u'v'w \arrow[ul, Rightarrow, red] \\
 & uv' \arrow[ur, Rightarrow, "fv'"'] & & & & uv'w \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

- On s'intéresse donc à la réécriture modulo les règles d'inverse.

Réécriture dans des groupes

- Il existe une approche "monoïde" de réécriture de groupe: soit $< X \mid R >$ une présentation de groupe, on étudie le SRM

$$(X \sqcup \overline{X}, R \cup \{ss^{-1} \Rightarrow 1,\ s^{-1}s \Rightarrow 1\}_{s \in X}\ )$$

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[dd, dashed, no head, Rightarrow] \\
ss^{-1}s \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & \\
 & s
\end{tikzcd}$$

Pas satisfaisant !

- Si on cherche à réécrire dans le groupe libre (on identifie les ss^{-1} et 1), on doit définir des étapes de réécriture de la forme

$$\begin{array}{lll} uru^{-1}v \Rightarrow v & \text{si} & \ell(uru^{-1}v) > \ell(v) \\ v \Rightarrow uru^{-1}v & \text{si} & \ell(v) > \ell(uru^{-1}v) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & u'v \arrow[dr, Rightarrow, "u'g"] & & & & u'vw & \\
uv \arrow[ur, Rightarrow, "fv"] \arrow[dr, Rightarrow, "ug"'] & & u'v' & \rightsquigarrow & uvw \arrow[ur, Rightarrow, "fvw"] \arrow[dr, Rightarrow, "ugw"'] & & u'v'w \arrow[ul, Rightarrow] \\
 & uv' \arrow[ur, Rightarrow, "fv'"'] & & & & uv'w \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

- On s'intéresse donc à la réécriture modulo les règles d'inverse.

Réécriture dans des groupes

- Il existe une approche "monoïde" de réécriture de groupe: soit $< X \mid R >$ une présentation de groupe, on étudie le SRM

$$(X \sqcup \overline{X}, R \cup \{ss^{-1} \Rightarrow 1,\ s^{-1}s \Rightarrow 1\}_{s \in X}\ )$$

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dd, dashed, equal] \\ ss^{-1}s \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ & s \end{tikzcd}$$

Pas satisfaisant !

- Si on cherche à réécrire dans le groupe libre (on identifie les ss^{-1} et 1), on doit définir des étapes de réécriture de la forme

$$uru^{-1}v \Rightarrow v \quad \text{si} \quad \ell(uru^{-1}v) > \ell(v)$$
$$v \Rightarrow uru^{-1}v \quad \text{si} \quad \ell(v) > \ell(uru^{-1}v)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & u'v \arrow[dr, Rightarrow, "u'g"] & & & & u'vw & \\ uv \arrow[ur, Rightarrow, "fv"] \arrow[dr, Rightarrow, "ug"'] & & u'v' \arrow[r, rightsquigarrow] & {} & uvw \arrow[ur, Rightarrow, "fvw"] \arrow[dr, Rightarrow, "ugw"'] & & u'v'w \arrow[ul, Rightarrow, red] \\ & uv' \arrow[ur, Rightarrow, "fv'"'] & & & & uv'w \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

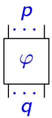
- On s'intéresse donc à la réécriture modulo les règles d'inverse.

Dans des $(2,2)$-catégories linéaires

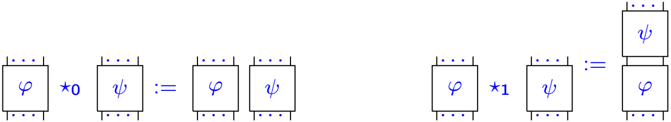
- On s'intéresse à des 2 catégories $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ où pour tous $p, q \in \mathcal{C}_1$, l'ensemble $\mathcal{C}_2(p,q)$ des 2-cellules entre p et q est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Dans des $(2,2)$-catégories linéaires

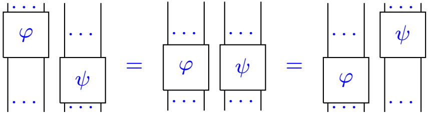
- On s'intéresse à des 2 catégories $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ où pour tous $p, q \in \mathcal{C}_1$, l'ensemble $\mathcal{C}_2(p, q)$ des 2-cellules entre p et q est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Un élément de $\mathcal{C}_2(p, q)$ peut être représenté par



- Les compositions de la 2-catégorie sont données par



modulo la relation d'échange



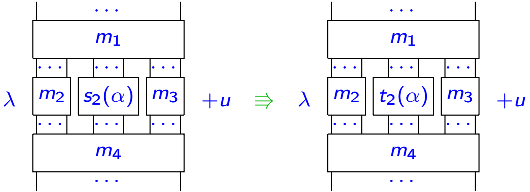
Dans des $(2,2)$-catégories linéaires

- On s'intéresse à des présentations diagrammatiques d'algèbres qui ont une structure de $(2,2)$-catégorie linéaire.

- Un monôme est un circuit obtenu par compositions en $\star_0$ et $\star_1$ des circuits générateurs.

Dans des $(2,2)$-catégories linéaires

- On s'intéresse à des présentations diagrammatiques d'algèbres qui ont une structure de $(2,2)$-catégorie linéaire.
- Un monôme est un circuit obtenu par compositions en $\star_0$ et $\star_1$ des circuits générateurs.
- Une étape de réécriture est une 3-cellule de la forme



  où $s_2(\alpha)$ et $t_2(\alpha)$ sont des 2-cellules parallèles telles que le monôme $\lambda m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans u.

Théorème (C. Alleaume, 2016)

Pour un tel système de réécriture terminant, confluent et dont toutes les sources des règles sont des monômes, l'ensemble des monômes de $\mathcal{C}_2(p,q)$ en forme normale forme une base de $\mathcal{C}_2(p,q)$.

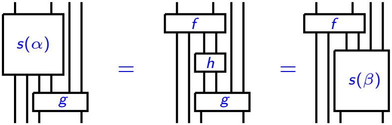
Branchements critiques dans des $(2,2)$-catégories linéaires

Dans ce contexte, il y a 3 types différents de branchements critiques:

Branchements critiques dans des $(2,2)$-catégories linéaires

Dans ce contexte, il y a 3 types différents de branchements critiques:

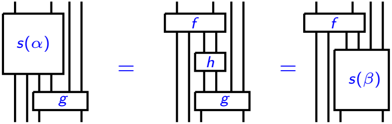
- Branchements critiques réguliers:



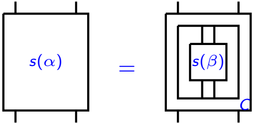
Branchements critiques dans des $(2,2)$-catégories linéaires

Dans ce contexte, il y a 3 types différents de branchements critiques:

- Branchements critiques réguliers:



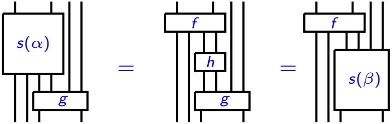
- Branchements critiques d' inclusion:



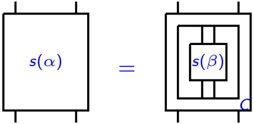
Branchements critiques dans des $(2,2)$-catégories linéaires

Dans ce contexte, il y a 3 types différents de branchements critiques:

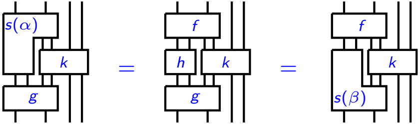
- Branchements critiques réguliers:



- Branchements critiques d' inclusion:



- Branchements critiques indexés à droite (aussi indexés à gauche, multi-indexés):



Exemple: les algèbres KLR

- Soit Γ un graphe ayant pour ensemble de sommets I. On fixe $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$ un élément du semi-groupe libre sur I. On pose $m := |\mathcal{V}| = \sum \mathcal{V}_i$.

Exemple: les algèbres KLR

- Soit Γ un graphe ayant pour ensemble de sommets I. On fixe $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$ un élément du semi-groupe libre sur I. On pose $m := |\mathcal{V}| = \sum \mathcal{V}_i$.
- Soit $\cdot$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $i \cdot j \in \{0, -1\}$ pour tous $i, j \in I$.

Exemple: les algèbres KLR

- Soit Γ un graphe ayant pour ensemble de sommets I. On fixe $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$ un élément du semi-groupe libre sur I. On pose $m := |\mathcal{V}| = \sum \mathcal{V}_i$.
- Soit $\cdot$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $i \cdot j \in \{0, -1\}$ pour tous $i, j \in I$.
- On considère l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ de suites de sommets de Γ de longueur m où le sommet i apparaît exactement $\mathcal{V}_i$ fois. Par exemple, $\mathrm{Seq}(2i + j) = \{iij, iji, jii\}$.

Exemple: les algèbres KLR

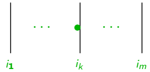
- Soit Γ un graphe ayant pour ensemble de sommets I. On fixe $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i \in \mathbb{N}[I]$ un élément du semi-groupe libre sur I. On pose $m := |\mathcal{V}| = \sum \mathcal{V}_i$.

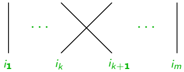
- Soit $\cdot$ une forme bilinéaire sur $\mathbb{Z}[I]$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $i \cdot j \in \{0, -1\}$ pour tous $i, j \in I$.

- On considère l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ de suites de sommets de Γ de longueur m où le sommet i apparaît exactement $\mathcal{V}_i$ fois. Par exemple, $\mathrm{Seq}(2i + j) = \{iij, iji, jii\}$.

- Pour $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j} \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, on définit l'ensemble ${}_{\mathbf{j}}R(\mathcal{V})_{\mathbf{i}}$ des "diagrammes de tresses" entre $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, c'est à dire:
  - Chaque brin est étiqueté par un sommet de Γ;
  - Un brin ne s'intersecte pas avec lui même
  - On doit lire avec l'étiquetage $\mathbf{i}$ (resp. $\mathbf{j}$) en bas (resp. en haut) du diagramme.

- Les algèbres KLR admettent une présentation diagrammatique par générateurs et relations: pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, on a des générateurs

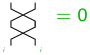
$x_{k,\mathbf{i}} =$ 

$\tau_{k,\mathbf{i}} =$ 

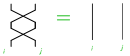
Exemple: les algèbres KLR

- Les relations sont

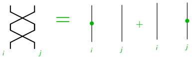
i) Pour $i \in I$,



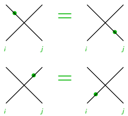
ii) Pour $i, j \in I$ tels que $i \cdot j = 0$,



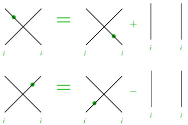
iii) Pour $i, j \in I$ tels que $i \cdot j = -1$,



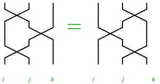
iv) Pour $i, j \in I$,



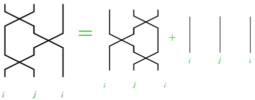
v) Pour $i \in I$,



vi) Pour $i, j, k \in I$, sauf si $i = k$ et $i \cdot j = -1$,



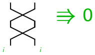
vii) Pour $i, j \in I$ tels que $i \cdot j = -1$,



Exemple: les algèbres KLR

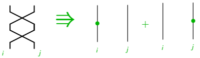
- Les relations sont

i) Pour $i \in I$,

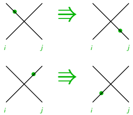


ii) Pour $i, j \in I$ tels que $i \cdot j = 0$,

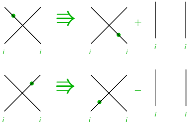
iii) Pour $i, j \in I$ tels que $i \cdot j = -1$,



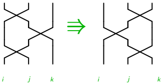
iv) Pour $i, j \in I$,



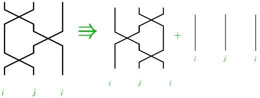
v) Pour $i \in I$,



vi) Pour $i, j, k \in I$, sauf si $i = k$ et $i \cdot j = -1$,



vii) Pour $i, j \in I$ tels que $i \cdot j = -1$,



- Avec ces orientations, on prouve:

Théorème

Les diagrammes avec un nombre minimal de croisements et les points situés en bas forment une base (de type Poincaré-Birkhoff-Witt) des algèbres KLR.