

Bases de 2-catégories linéaires par réécriture.

Benjamin Dupont

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Séminaire d'algèbre, Université Lyon 1

15 Octobre 2020

I. La réécriture

II. Réécriture dans des 2-catégories linéaires

III. Extension à la réécriture modulo

I. La réécriture

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques :

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots ([Thue '14](#)),

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots ([Thue '14](#)), algèbre universelle ([Knuth-Bendix '70](#)),

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots ([Thue '14](#)), algèbre universelle ([Knuth-Bendix '70](#)), algèbres commutatives ([Buchberger '65](#)), algèbres associatives ([Bokut '76](#), [Bergman '78](#), [Mora '86](#)),

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots ([Thue '14](#)), algèbre universelle ([Knuth-Bendix '70](#)), algèbres commutatives ([Buchberger '65](#)), algèbres associatives ([Bokut '76](#), [Bergman '78](#), [Mora '86](#)), catégories de dimension supérieure ([Guiraud-Malbos '09](#)),

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots ([Thue '14](#)), algèbre universelle ([Knuth-Bendix '70](#)), algèbres commutatives ([Buchberger '65](#)), algèbres associatives ([Bokut '76](#), [Bergman '78](#), [Mora '86](#)), catégories de dimension supérieure ([Guiraud-Malbos '09](#)), catégories linéaires de dimension supérieure ([Alleaume '16](#), [Guiraud-Hoffbeck-Malbos '18](#)).

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots (Thue '14), algèbre universelle (Knuth-Bendix '70), algèbres commutatives (Buchberger '65), algèbres associatives (Bokut '76, Bergman '78, Mora '86), catégories de dimension supérieure (Guiraud-Malbos '09), catégories linéaires de dimension supérieure (Alleaume '16, Guiraud-Hoffbeck-Malbos '18).
- ▶ **Objectifs** : Étude par réécriture des algèbres et catégories diagrammatiques en théorie des représentations.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots (Thue '14), algèbre universelle (Knuth-Bendix '70), algèbres commutatives (Buchberger '65), algèbres associatives (Bokut '76, Bergman '78, Mora '86), catégories de dimension supérieure (Guiraud-Malbos '09), catégories linéaires de dimension supérieure (Alleaume '16, Guiraud-Hoffbeck-Malbos '18).
- ▶ **Objectifs** : Étude par réécriture des algèbres et catégories diagrammatiques en théorie des représentations.
 - ▶ Algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) pour catégorifier des groupes quantiques.
 - ▶ Catégorifications d'algèbres de Heisenberg.
 - ▶ Algèbres de Temperley-Lieb, Brauer.

La réécriture

- ▶ Réécriture algébrique: théorie du calcul sur des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
 - ▶ Calcul de syzygies, *i.e.* relations entre les relations, et d'invariants homologiques.
 - ▶ Calcul de bases linéaires.
 - ▶ Preuves de Koszulité d'algèbres.
 - ▶ Calcul de résolutions libres et de remplacements cofibrants.
- ▶ Réécriture dans divers contextes algébriques : réécriture de mots (Thue '14), algèbre universelle (Knuth-Bendix '70), algèbres commutatives (Buchberger '65), algèbres associatives (Bokut '76, Bergman '78, Mora '86), catégories de dimension supérieure (Guiraud-Malbos '09), catégories linéaires de dimension supérieure (Alleaume '16, Guiraud-Hoffbeck-Malbos '18).
- ▶ **Objectifs** : Étude par réécriture des algèbres et catégories diagrammatiques en théorie des représentations.
 - ▶ Algèbres Khovanov-Lauda-Rouquier (KLR) pour catégorifier des groupes quantiques.
 - ▶ Catégorifications d'algèbres de Heisenberg.
 - ▶ Algèbres de Temperley-Lieb, Brauer.
- ▶ **Problème** : Calcul de bases pour les espaces de morphismes.

Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.

Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.

abc

Réécriture de mots

► **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

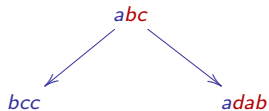
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.

A diagram illustrating a transformation. The word "abc" is written in red at the top right. A blue arrow points from "abc" down and to the left to the word "bcc", which is also written in red.

Réécriture de mots

► **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

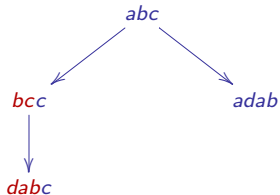
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

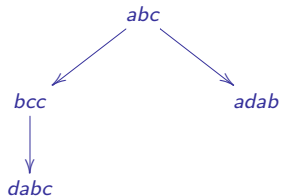
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

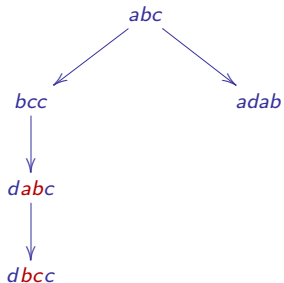
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

► **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

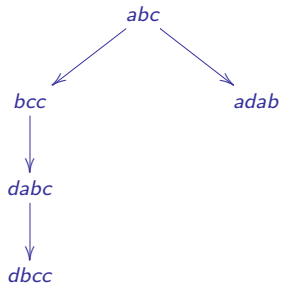
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

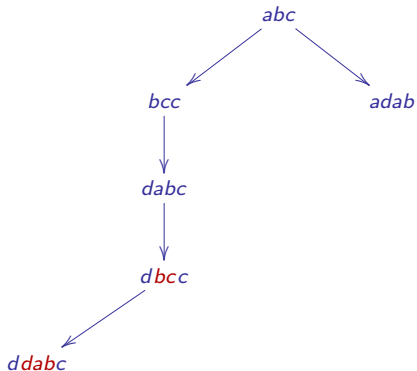
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

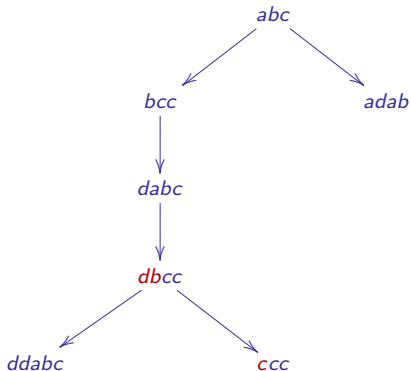
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

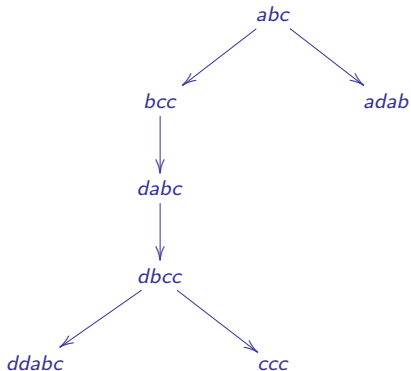
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

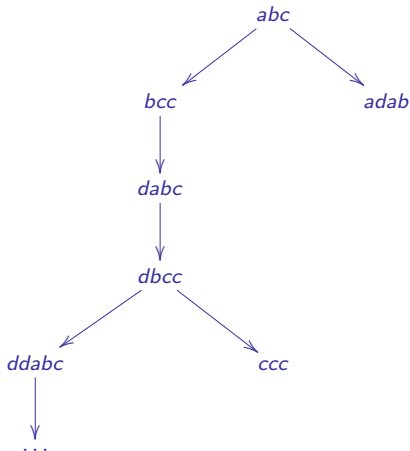
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

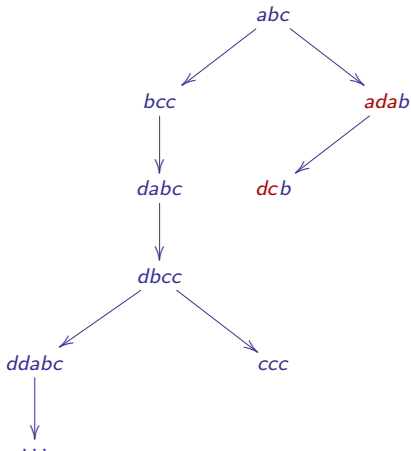
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

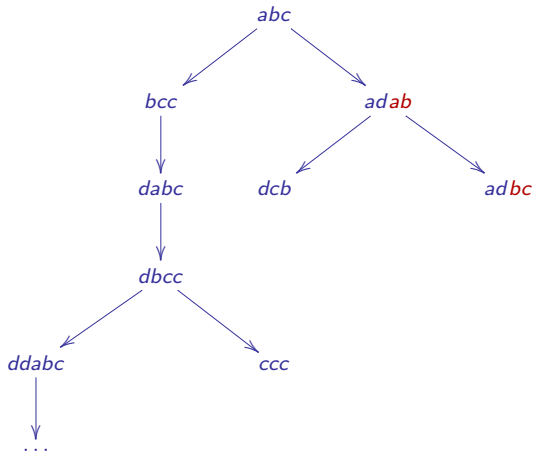
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

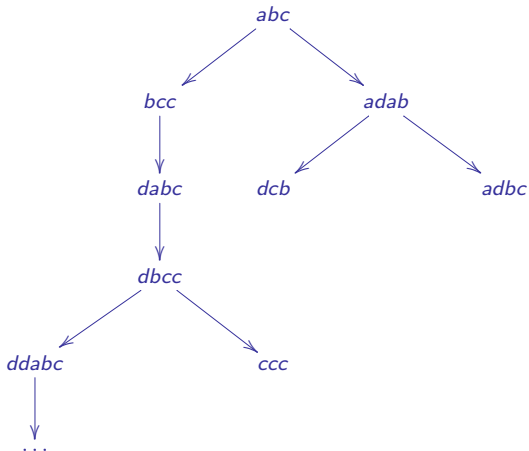
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

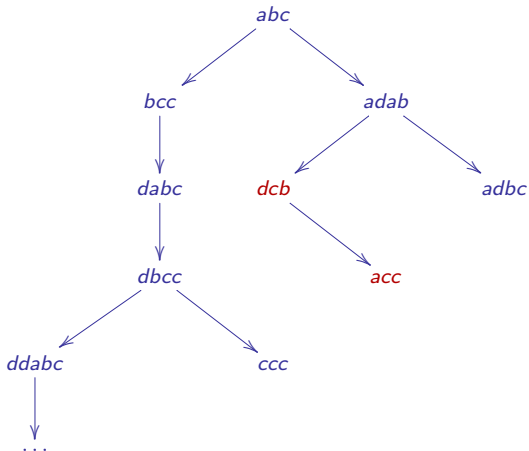
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

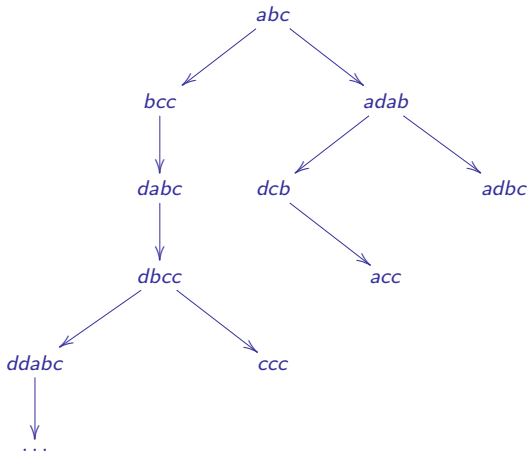
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

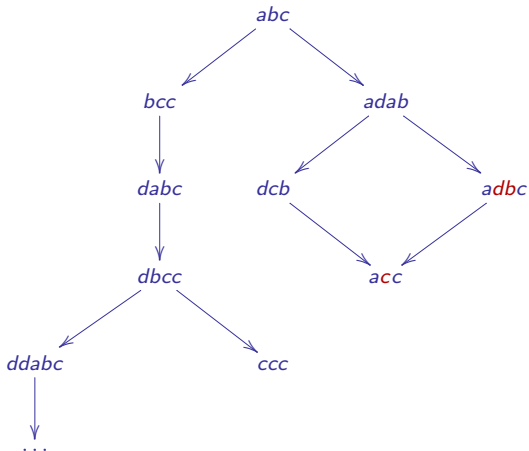
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

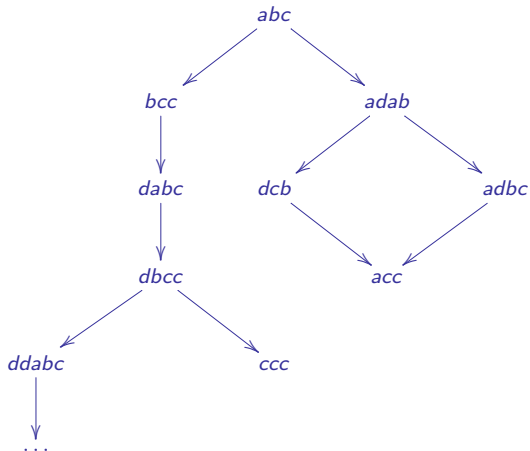
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

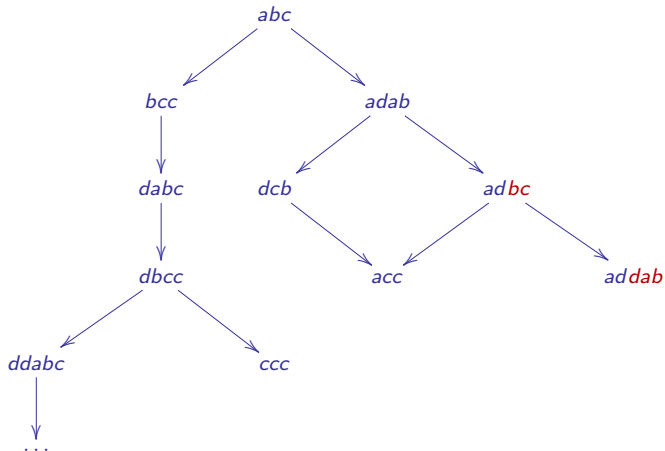
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

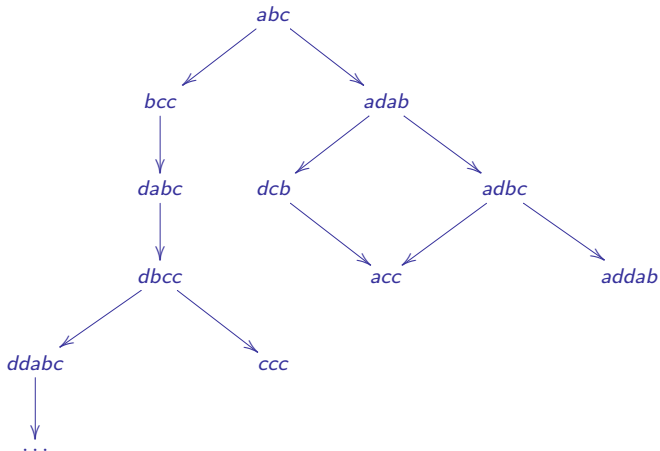
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

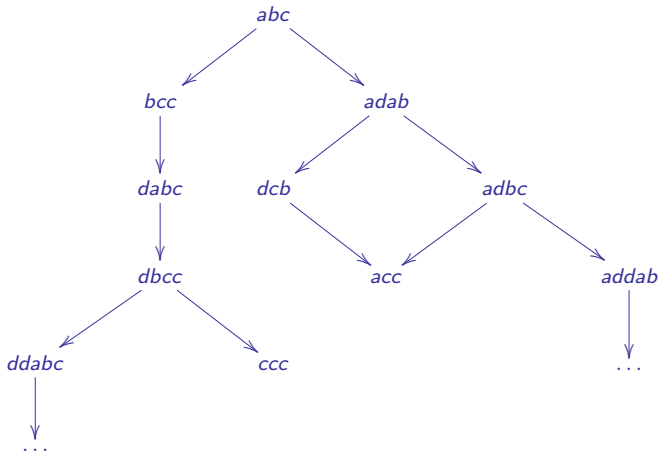
$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dc b \rightarrow acc$.



Réécriture de mots

- **Exemple:** $X := \{a, b, c, d\}$ un alphabet, et on considère les 5 règles de réécriture:

$ab \rightarrow bc$, $ada \rightarrow dc$, $bc \rightarrow dab$, $db \rightarrow c$, $dcb \rightarrow acc$.



Terminaison, formes normales et confluence

- Soit (X, R) un SRM et X^* le monoïde libre sur X . Une **étape de réécriture** de (X, R) est une réduction

$$\xrightarrow{u} \left(\begin{array}{c} s(f) \\ \downarrow f \\ t(f) \end{array} \right) \xrightarrow{v} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

Terminaison, formes normales et confluence

- Soit (X, R) un SRM et X^* le monoïde libre sur X . Une **étape de réécriture** de (X, R) est une réduction

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \left(\begin{array}{c} s(f) \\ \downarrow f \\ t(f) \end{array} \right) \xrightarrow{v} \end{array} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

- Un mot x de X^* est **forme normale** si il n'existe pas y dans X^* tel que $x \rightarrow y$.

Terminaison, formes normales et confluence

- Soit (X, R) un SRM et X^* le monoïde libre sur X . Une **étape de réécriture** de (X, R) est une réduction

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \left(\begin{array}{c} s(f) \\ \downarrow f \\ t(f) \end{array} \right) \xrightarrow{v} \end{array} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

- Un mot x de X^* est **forme normale** si il n'existe pas y dans X^* tel que $x \rightarrow y$.
- (X, R) **termine** si il n'existe pas de suite infinie de réécriture pour (X, R) .

Terminaison, formes normales et confluence

- Soit (X, R) un SRM et X^* le monoïde libre sur X . Une **étape de réécriture** de (X, R) est une réduction

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \left(\begin{array}{c} s(f) \\ \downarrow f \\ t(f) \end{array} \right) \xrightarrow{v} \end{array} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

- Un mot x de X^* est **forme normale** si il n'existe pas y dans X^* tel que $x \rightarrow y$.
- (X, R) **termine** si il n'existe pas de suite infinie de réécriture pour (X, R) .
- Si (X, R) termine, chaque élément $x \in X^*$ admet au moins une forme normale.

Terminaison, formes normales et confluence

- Soit (X, R) un SRM et X^* le monoïde libre sur X . Une **étape de réécriture** de (X, R) est une réduction

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \quad \begin{array}{c} s(f) \\ \downarrow f \\ t(f) \end{array} \quad \xrightarrow{v} \end{array} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

- Un mot x de X^* est **forme normale** si il n'existe pas y dans X^* tel que $x \rightarrow y$.
- (X, R) **termine** si il n'existe pas de suite infinie de réécriture pour (X, R) .
- Si (X, R) termine, chaque élément $x \in X^*$ admet au moins une forme normale.
- Un **branchement** (resp. **branchement local**) de (X, R) est:



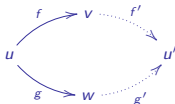
où f et g sont des suites de réécriture (resp. étapes de réécriture) et $u, v, w \in X^*$.

Terminaison, formes normales et confluence

- ▶ Soit (X, R) un SRM et X^* le monoïde libre sur X . Une **étape de réécriture** de (X, R) est une réduction

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{u} \quad \left(\begin{array}{c} s(f) \\ \downarrow f \\ t(f) \end{array} \right) \quad \xrightarrow{v} \end{array} \quad \text{où } u, v \in X^* \text{ et } f : s(f) \rightarrow t(f) \in R.$$

- ▶ Un mot x de X^* est **forme normale** si il n'existe pas y dans X^* tel que $x \rightarrow y$.
- ▶ (X, R) **termine** si il n'existe pas de suite infinie de réécriture pour (X, R) .
- ▶ Si (X, R) termine, chaque élément $x \in X^*$ admet au moins une forme normale.
- ▶ Un **branchement** (resp. **branchement local**) de (X, R) est:



où f et g sont des suites de réécriture (resp. étapes de réécriture) et $u, v, w \in X^*$.

- ▶ Un branchement (local) est **confluent** si il existe des suites de réécriture comme ci-dessus.

Confluence et branchements critiques

- ▶ Si (X, R) est **confluent**, chaque élément $x \in X^*$ admet au plus une forme normale.

Confluence et branchements critiques

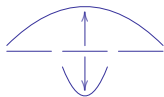
- ▶ Si (X, R) est **confluent**, chaque élément $x \in X^*$ admet au plus une forme normale.
- ▶ **Théorème (Lemme de Newman)** : Si (X, R) termine, alors la confluence est équivalent à la confluence locale.

Confluence et branchements critiques

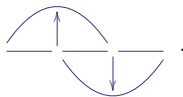
- ▶ Si (X, R) est **confluent**, chaque élément $x \in X^*$ admet au plus une forme normale.
- ▶ **Théorème (Lemme de Newman)** : Si (X, R) termine, alors la confluence est équivalent à la confluence locale.
- ▶ Les branchements locaux sont ordonnés par $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$ pour $u, v \in X^*$. Un **branchement critique** est un branchement minimal pour \sqsubseteq .

Confluence et branchements critiques

- ▶ Si (X, R) est **confluent**, chaque élément $x \in X^*$ admet au plus une forme normale.
- ▶ **Théorème (Lemme de Newman)** : Si (X, R) termine, alors la confluence est équivalent à la confluence locale.
- ▶ Les branchements locaux sont ordonnés par $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$ pour $u, v \in X^*$. Un **branchement critique** est un branchement minimal pour \sqsubseteq .
- ▶ Il y a deux formes de branchements critiques:

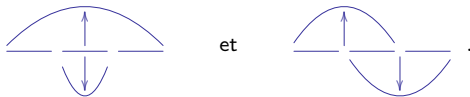


et



Confluence et branchements critiques

- ▶ Si (X, R) est **confluent**, chaque élément $x \in X^*$ admet au plus une forme normale.
- ▶ **Théorème (Lemme de Newman)** : Si (X, R) termine, alors la confluence est équivalent à la confluence locale.
- ▶ Les branchements locaux sont ordonnés par $(f, g) \sqsubseteq (ufv, ugv)$ pour $u, v \in X^*$. Un **branchement critique** est un branchement minimal pour \sqsubseteq .
- ▶ Il y a deux formes de branchements critiques:



- ▶ **Théorème (Lemme des branchements critiques)**: (X, R) est localement confluent ssi tous ses branchements critiques sont confluents.

Résolution du problème du mot

- ▶ Soit M un monoïde présenté par générateurs X et relations R , i.e.

$$M \simeq X^* / \equiv_R,$$

c'est-à-dire $u = v$ dans M ssi $\bar{u} \stackrel{R}{\leftrightarrow} \bar{v}$ in X^* pour des représentants \bar{u}, \bar{v} de u, v dans X^* .

Résolution du problème du mot

- ▶ Soit M un monoïde présenté par générateurs X et relations R , i.e.

$$M \simeq X^* / \equiv_R,$$

c'est-à-dire $u = v$ dans M ssi $\bar{u} \stackrel{R}{\leftrightarrow} \bar{v}$ in X^* pour des représentants \bar{u}, \bar{v} de u, v dans X^* .

- ▶ **Problème du mot** : étant donné u et v dans X^* , est-ce que $u = v$ dans M ?

Résolution du problème du mot

- ▶ Soit M un monoïde présenté par générateurs X et relations R , i.e.

$$M \simeq X^* / \equiv_R,$$

c'est-à-dire $u = v$ dans M ssi $\bar{u} \stackrel{R}{\leftrightarrow} \bar{v}$ in X^* pour des représentants \bar{u}, \bar{v} de u, v dans X^* .

- ▶ **Problème du mot** : étant donnés u et v dans X^* , est-ce que $u = v$ dans M ?
- ▶ **Algorithme de la forme normale** : Si pour une orientation des relations de R , le SRM (X, R) est convergent, ce problème est décidable.

Résolution du problème du mot

- ▶ Soit M un monoïde présenté par générateurs X et relations R , i.e.

$$M \simeq X^* / \equiv_R,$$

c'est-à-dire $u = v$ dans M ssi $\bar{u} \stackrel{R}{\leftrightarrow} \bar{v}$ in X^* pour des représentants \bar{u}, \bar{v} de u, v dans X^* .

- ▶ **Problème du mot** : étant donnés u et v dans X^* , est-ce que $u = v$ dans M ?
- ▶ **Algorithme de la forme normale** : Si pour une orientation des relations de R , le SRM (X, R) est convergent, ce problème est décidable.

Entrée: $u, v \in X^*$

Result: Booléen $u = v$ dans M ?

Réduire u en \hat{u} ;

Réduire v en \hat{v} ;

if $\hat{u} = \hat{v}$ **then**

| $u = v$ dans M .

else

| $u \neq v$ dans M .

end

Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.

Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$.

Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$.



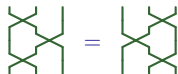
Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$. $s = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$ | $t = | \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$



- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec $s > t$.

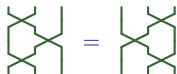
Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

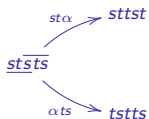
- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$. $s = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$ | $t = \begin{array}{c} | \\ \diagdown \diagup \end{array}$ | $\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$



- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec $s > t$.
- ▶ Un branchement critique non confluent :



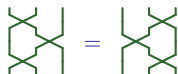
Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

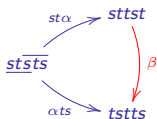
- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$. $s = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$ | $t = | \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$



- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec $s > t$.
- ▶ Un branchement critique non confluent :



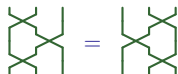
Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

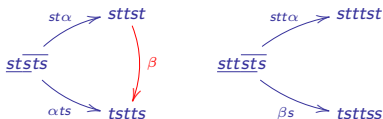
- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$. $s = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$ | $t = | \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$



- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec $s > t$.
- ▶ Un branchement critique non confluent :



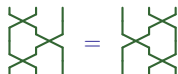
Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

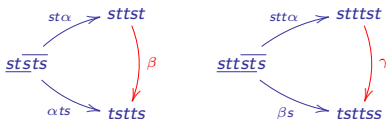
- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$. $s = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$ | $t = \begin{array}{c} | \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$



- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec $s > t$.
- ▶ Un branchement critique non confluent :



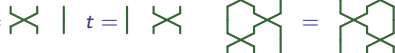
Exemples

Exemple. $X = \{a\}$ et $R = \{aa \xrightarrow{\alpha} 1\}$.

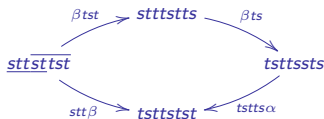
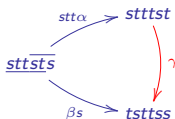
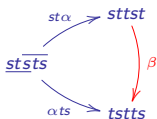
- ▶ Terminaison: le nombre de a est strictement décroissant.
- ▶ Il y a un branchement critique, qui est confluent.



Exemple. $X = \{s, t\}$ et $R = \{sts \xrightarrow{\alpha} tst\}$.



- ▶ Terminaison: via un ordre degré lexicographique avec $s > t$.
- ▶ Un branchement critique non confluent :



Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.

Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).

Exemples

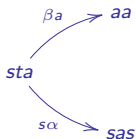
- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.

Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.

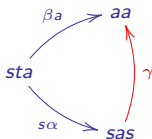
Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.



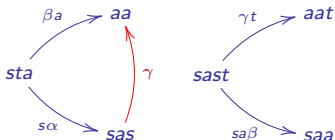
Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.



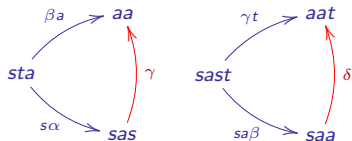
Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.



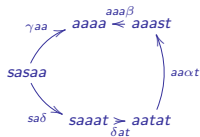
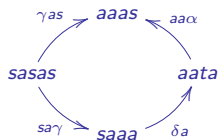
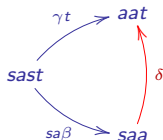
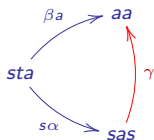
Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.



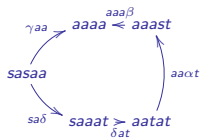
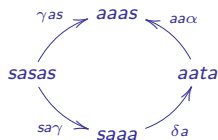
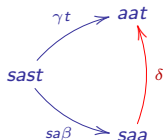
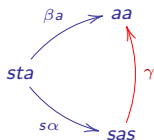
Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.



Exemples

- ▶ Ce processus, appelé **complétion de Knuth-Bendix**, peut ne pas terminer. Lorsqu'il termine, il renvoie un système convergent présentant le même monoïde.
- ▶ B_3^+ n'admet pas de présentation convergente finie avec 2 générateurs, [Kapur & Narendran, '85](#).
- ▶ $X = \{s, t, a\}$ et $R = \{ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a\}$ présente le même monoïde.
 - ▶ Il termine pour l'ordre degré lexicographique donné par $s > t > a$.



- ▶ Le SRM $\langle s, t, a \mid ta \xrightarrow{\alpha} as, st \xrightarrow{\beta} a, sas \xrightarrow{\gamma} aa, saa \xrightarrow{\delta} aat \rangle$ est une présentation convergente de B_3^+ .

II. Réécriture dans des 2-catégories linéaires.

Présentations diagrammatiques

- ▶ **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

Présentations diagrammatiques

- ▶ **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.
- ▶ **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par
 - ▶ générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

Présentations diagrammatiques

- ▶ **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.
- ▶ **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par
 - ▶ générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

▶ relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ | \bullet \\ \dots \\ | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \quad \diagdown \quad \quad \diagup \quad \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ | \quad \quad \diagup \quad \quad \diagdown \quad \quad | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad i+1 \quad \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ | \bullet \\ \dots \\ | \\ \mathbf{1} \quad i \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \diagdown \quad \diagup \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \dots \\ | \quad \diagup \quad \diagdown \quad | \\ \mathbf{1} \quad i \quad i+1 \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \quad \bullet \quad \dots \\ | \quad i \quad j \quad n \end{array} = \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \quad \bullet \quad \dots \\ | \quad i \quad j \quad n \end{array}$$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \dots | \bullet \dots | \\ \mathbf{1} \quad \quad \quad i \quad \quad \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \dots \diagdown \diagup \dots | \\ \mathbf{1} \quad \quad \quad i \quad \quad \quad i+1 \quad \quad \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

The diagrammatic equation shows two diagrams separated by an equals sign. The left diagram consists of a crossing between strands i and $i+1$, followed by a dot on strand j , with strands $1, \dots, i, i+1, j, \dots, n$ labeled at the bottom. The right diagram consists of a dot on strand j , followed by a crossing between strands i and $i+1$, with strands $1, i, i+1, j, \dots, n$ labeled at the bottom.

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ | \bullet \\ \dots \\ | \\ \mathbf{1} \quad i \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad \dots \quad | \\ \mathbf{1} \quad i \quad i+1 \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

The diagrammatic equation shows two crossings of strands. The left side shows a crossing between strands i and $i+1$ followed by a crossing between strands j and $j+1$. The right side shows a crossing between strands j and $j+1$ followed by a crossing between strands i and $i+1$. The strands are labeled $1, i, i+1, j, j+1, n$ at the bottom. The equation is represented as $\left| \begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad \dots \quad | \\ \mathbf{1} \quad i \quad i+1 \quad j \quad j+1 \quad n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \dots \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad \dots \quad | \\ \mathbf{1} \quad i \quad i+1 \quad j \quad j+1 \quad n \end{array} \right|$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ | \bullet \\ \dots \\ | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \quad \diagdown \quad \quad \diagup \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ | \quad \quad \diagup \quad \quad \diagdown \quad | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad i+1 \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

$$\begin{array}{c} | \quad \quad \diagdown \quad \quad \diagup \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ | \quad \quad \diagup \quad \quad \diagdown \quad | \\ \mathbf{1} \quad \quad i \quad \quad i+1 \quad n \end{array} = 0$$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ | \bullet \\ \dots \\ | \\ \hline 1 \quad \quad i \quad \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \quad | \\ \dots \quad \quad \diagdown \quad \quad \diagup \quad \quad \dots \\ \dots \quad \quad \diagup \quad \quad \diagdown \quad \quad \dots \\ | \quad \quad | \\ \hline 1 \quad \quad i \quad \quad i+1 \quad \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

$$\begin{array}{c} | \quad \quad | \\ \diagdown \quad \quad \diagup \\ | \quad \quad | \\ \diagup \quad \quad \diagdown \\ | \quad \quad | \\ \hline i \quad \quad i+1 \end{array} = 0$$

Présentations diagrammatiques

- ▶ **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

- ▶ **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

- ▶ générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad | \quad \dots \quad | \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \\ \hline 1 \quad \quad \quad i \quad \quad \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad \diagdown \quad \diagup \quad \dots \quad | \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \\ \hline 1 \quad \quad \quad i \quad \quad \quad i+1 \quad \quad \quad n \end{array}$$

- ▶ relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

The diagram shows an equality between two configurations of three strands labeled i , $i+1$, and $i+2$. On the left, the strands i and $i+1$ cross each other, and then strand $i+2$ crosses over both of them. On the right, the strands $i+1$ and $i+2$ cross each other, and then strand i crosses over both of them. This represents the commutation relation between the generators ξ_i and ξ_{i+1} .

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \dots | \bullet \dots | \\ \mathbf{1} \quad \quad \quad \mathbf{i} \quad \quad \quad \mathbf{n} \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \times \quad \quad \quad \dots \\ | \quad \quad \quad | \\ \mathbf{1} \quad \quad \quad \mathbf{i} \quad \quad \quad \mathbf{i+1} \quad \quad \quad \mathbf{n} \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

$$\begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \\ \times \quad \quad \quad \bullet \\ | \quad \quad \quad | \\ \mathbf{i} \quad \quad \quad \mathbf{i+1} \end{array} = \begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \\ \bullet \quad \quad \quad \times \\ | \quad \quad \quad | \\ \mathbf{i} \quad \quad \quad \mathbf{i+1} \end{array} - \begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \\ | \quad \quad \quad | \\ \mathbf{i} \quad \quad \quad \mathbf{i+1} \end{array}$$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \dots | \dots | \\ \mathbf{1} \quad \quad \mathbf{i} \quad \quad \mathbf{n} \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \dots \diagdown \dots | \\ | \dots \diagup \dots | \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \quad \mathbf{n} \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

$$\begin{array}{c} \bullet \diagdown \dots | \\ \diagup \dots | \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \dots | \\ \bullet \diagup \dots | \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \end{array}$$

Présentations diagrammatiques

► **Objectif** : étudier des algèbres et catégories présentées par générateurs et relations diagrammatiques.

► **Exemple**: Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke \mathcal{NH}_n de degré n est présentée par

► générateurs ξ_i pour $1 \leq i \leq n$ et ∂_i for $1 \leq i < n$;

$$\xi_i = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ | \bullet \\ \dots \\ | \\ \mathbf{1} \quad i \quad n \end{array}, \quad \partial_i = \begin{array}{c} | \quad \diagdown \quad \diagup \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \dots \\ | \quad \diagup \quad \diagdown \quad | \\ \mathbf{1} \quad i \quad i+1 \quad n \end{array}$$

► relations:

$$\xi_i \xi_j = \xi_j \xi_i$$

$$\partial_i \xi_j = \xi_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\partial_i^2 = 0$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$$

$$\xi_i \partial_i - \partial_i \xi_{i+1} = 1$$

$$\partial_i \xi_i - \xi_{i+1} \partial_i = 1$$

$$\begin{array}{c} \bullet \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ | \quad | \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \end{array} = \begin{array}{c} | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad | \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \\ | \quad | \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{i+1} \end{array}$$

► On étudie ces algèbres en les réalisant comme des espaces de 2-cellules d'une **2-catégorie linéaire**.

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .
 - ▶ la composition de morphismes est \mathbb{K} -bilinéaire.

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .
 - ▶ la composition de morphismes est \mathbb{K} -bilinéaire.
- ▶ Une **2-catégorie \mathbb{K} -linéaire** est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
 - ▶ $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous p, q dans \mathcal{C}_1 .

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .
 - ▶ la composition de morphismes est \mathbb{K} -bilinéaire.
- ▶ Une **2-catégorie \mathbb{K} -linéaire** est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
 - ▶ $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous p, q dans \mathcal{C}_1 .
 - ▶ \star_0 et \star_1 -composition de 1-cellules sont \mathbb{K} -bilinéaires.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & y \\ \Downarrow f & & \\ x & \xrightarrow{u'} & y \end{array} & \begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{v} & z \\ \Downarrow g & & \\ y & \xrightarrow{v'} & z \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u \star_0 v} & z \\ \Downarrow f \star_0 g & & \\ x & \xrightarrow{u' \star_0 v'} & z \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & y \\ \Downarrow f & & \\ x & \xrightarrow{v} & y \\ \Downarrow g & & \\ x & \xrightarrow{w} & y \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{u} & y \\ \Downarrow f \star_1 g & & \\ x & \xrightarrow{w} & y \end{array} \end{array}$$

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .
 - ▶ la composition de morphismes est \mathbb{K} -bilinéaire.
- ▶ Une **2-catégorie \mathbb{K} -linéaire** est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
 - ▶ $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous p, q dans \mathcal{C}_1 .
 - ▶ \star_0 et \star_1 -composition de 1-cellules sont \mathbb{K} -bilinéaires.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & & y \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & \Downarrow f & \\ & \Downarrow g & \\ & \curvearrowright & \curvearrowright \\ u' & & v' \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} x & & z \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & \Downarrow f + \mathbf{0}g & \\ & \Downarrow f + \mathbf{0}g & \\ & \curvearrowright & \curvearrowright \\ u' + \mathbf{0}v' & & \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & & y \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & \Downarrow f & \\ & \Downarrow g & \\ & \curvearrowright & \curvearrowright \\ u & & w \end{array} & \rightsquigarrow & \begin{array}{ccc} x & & y \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ & \Downarrow f + \mathbf{1}g & \\ & \Downarrow f + \mathbf{1}g & \\ & \curvearrowright & \curvearrowright \\ u & & w \end{array} \end{array} \end{array}$$

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

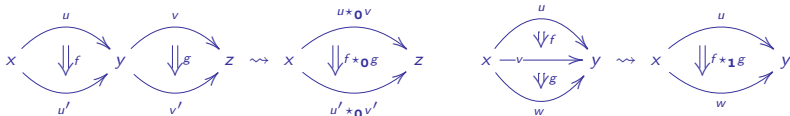
- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .
 - ▶ la composition de morphismes est \mathbb{K} -bilinéaire.
- ▶ Une **2-catégorie \mathbb{K} -linéaire** est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
 - ▶ $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous p, q dans \mathcal{C}_1 .
 - ▶ \star_0 et \star_1 -composition de 1-cellules sont \mathbb{K} -bilinéaires.

The image contains two commutative diagrams illustrating the bilinearity of composition in a 2-linear category. The left diagram shows the composition of two 1-cells u and v' with a 2-cell f , resulting in a 2-cell $f + 0g$. The right diagram shows the composition of two 1-cells v and w with a 2-cell f , resulting in a 2-cell $f + 1g$.

- ▶ Lorsque $\mathcal{C}_0 = \{*\}$, ces deux structures coïncident.

Catégories monoidales et 2-catégories linéaires

- ▶ Une **catégorie monoïdale \mathbb{K} -linéaire** est une catégorie \mathcal{A} munie:
 - ▶ un produit $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ associatif, unitaire et bilinéaire.
 - ▶ $\mathcal{A}(A, B)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous objets A, B de \mathcal{A} .
 - ▶ la composition de morphismes est \mathbb{K} -bilinéaire.
- ▶ Une **2-catégorie \mathbb{K} -linéaire** est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
 - ▶ $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel pour tous p, q dans \mathcal{C}_1 .
 - ▶ \star_0 et \star_1 -composition de 1-cellules sont \mathbb{K} -bilinéaires.



- ▶ Lorsque $\mathcal{C}_0 = \{*\}$, ces deux structures coïncident.

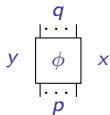
objets de $\mathcal{A} \leftrightarrow$ 1-cellules de \mathcal{C}

morphismes de $\mathcal{A} \leftrightarrow$ 2-cellules de \mathcal{C}

$\otimes \leftrightarrow \star_0$, composition de morphismes $\leftrightarrow \star_1$.

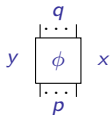
Diagrammes de cordes

- ▶ Une 2-cellule $\phi : p \Rightarrow q$ avec $p, q : x \rightarrow y$ d'une 2-catégorie (linéaire) \mathcal{C} peut être représentée par un **diagramme de corde**:

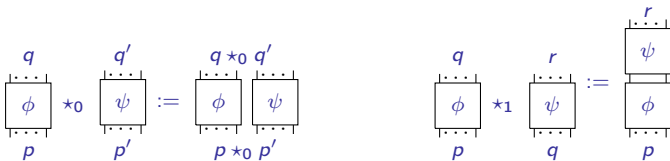


Diagrammes de cordes

- Une 2-cellule $\phi : p \Rightarrow q$ avec $p, q : x \rightarrow y$ d'une 2-catégorie (linéaire) \mathcal{C} peut être représentée par un **diagramme de corde**:

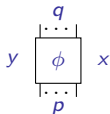


- Compositions:

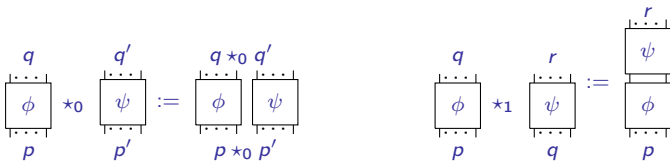


Diagrammes de cordes

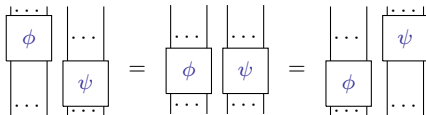
- ▶ Une 2-cellule $\phi : p \Rightarrow q$ avec $p, q : x \rightarrow y$ d'une 2-catégorie (linéaire) \mathcal{C} peut être représentée par un **diagramme de corde**:



- ▶ Compositions:



- ▶ Ces compositions satisfont les **relations d'échange**:



Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burroni '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés $(3, 2)$ -polygraphes linéaires.

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burrone '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.
- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) .

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burroni '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.
- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burrone '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.
- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .
- ▶ $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1\}, \star_0 = +, P_1^* = \mathbb{N}$,

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burrone '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

▶ $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1\}, \star_0 = +, P_1^* = \mathbb{N}$,

▶ Extension cellulaire $P_2 \begin{matrix} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{t_1} \end{matrix} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1, t_0 s_1 = t_0 t_1$.

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burrone '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

- ▶ $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1\}, \star_0 = +, P_1^* = \mathbb{N}$,

- ▶ Extension cellulaire $P_2 \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1, t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- ▶ $P_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} : 1 \rightarrow 1 \}$

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burrone '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

- ▶ $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1\}, \star_0 = +, P_1^* = \mathbb{N}$,

- ▶ Extension cellulaire $P_2 \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1, t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- ▶ $P_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ | \end{array} : 1 \rightarrow 1 \}$

- ▶ P_2^* : 2-catégorie libre sur P_2 .

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burrone '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

- ▶ Extension cellulaire $P_2 \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1$, $t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- ▶ P_2^* : 2-catégorie libre sur P_2 .

- ▶ $P_0 = \{*\}$, $P_1 = \{1\}$, $\star_0 = +$, $P_1^* = \mathbb{N}$,

- ▶ $P_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} : 1 \rightarrow 1 \}$

- ▶ $P_2^* = \{ \text{diagrammes formés de compositions } \star_0 \text{ et } \star_1 \text{ de croisements et points} \}$

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burroni '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

- ▶ Extension cellulaire $P_2 \xrightarrow[t_1]{s_1} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1$, $t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- ▶ P_2^* : 2-catégorie libre sur P_2 .

- ▶ P_2^ℓ : 2-catégorie linéaire libre sur P_2 :

$$\forall x, y \in P_1^* : P_2^\ell(x, y) = \mathbb{K}[P_2^*(x, y)].$$

- ▶ $P_0 = \{*\}$, $P_1 = \{1\}$, $\star_0 = +$, $P_1^* = \mathbb{N}$,

- ▶ $P_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} : 1 \rightarrow 1 \}$

- ▶ $P_2^* = \{ \text{diagrammes formés de compositions } \star_0 \text{ et } \star_1 \text{ de croisements et points} \}$

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burroni '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

- ▶ Extension cellulaire $P_2 \xrightarrow[t_1]{s_1} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1$, $t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- ▶ P_2^* : 2-catégorie libre sur P_2 .

- ▶ P_2^ℓ : 2-catégorie linéaire libre sur P_2 :
 $\forall x, y \in P_1^* : P_2^\ell(x, y) = \mathbb{K}[P_2^*(x, y)]$.

- ▶ $P_0 = \{*\}$, $P_1 = \{1\}$, $\star_0 = +$, $P_1^* = \mathbb{N}$,

- ▶ $P_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array} : 1 \rightarrow 1 \}$

- ▶ $P_2^* = \{ \text{diagrammes formés de compositions } \star_0 \text{ et } \star_1 \text{ de croisements et points} \}$

- ▶ $P_2^\ell = \{ \mathbb{K} - \text{combinaisons linéaires de diagrammes de } P_2^* \}$

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ Les polygraphes (Burroni '93 - Street '87) sont des systèmes générateurs adaptés aux présentations de catégories de dimension supérieure globulaires strictes.
 - ▶ Les 2-catégories linéaires sont présentées par des systèmes de réécriture appelés **(3, 2)-polygraphes linéaires**.

- ▶ Un 1-polygraphe, *i.e.* un graphe orienté (P_1, P_0, s_0, t_0) . P_1^* : 1-catégorie libre sur P_1 .

- ▶ Extension cellulaire $P_2 \xrightleftharpoons[t_1]{s_1} P_1^*$ satisfaisant $s_0 s_1 = s_0 t_1$, $t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- ▶ P_2^* : 2-catégorie libre sur P_2 .

- ▶ P_2^ℓ : 2-catégorie linéaire libre sur P_2 :

$$\forall x, y \in P_1^* : P_2^\ell(x, y) = \mathbb{K}[P_2^*(x, y)].$$

- ▶ Extension cellulaire $P_3 \xrightleftharpoons[t_2]{s_2} P_2^\ell$, fixant une orientation des relations et satisfaisant $s_1 s_2 = s_1 t_2$, $t_1 s_2 = t_1 t_2$.

- ▶ $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1\}, \star_0 = +, P_1^* = \mathbb{N}$,

- ▶ $P_2 = \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} : 2 \rightarrow 2, \quad \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ | \end{array} : 1 \rightarrow 1 \}$

- ▶ $P_2^* = \{ \text{diagrammes formés de compositions } \star_0 \text{ et } \star_1 \text{ de croisements et points} \}$

- ▶ $P_2^\ell = \{ \mathbb{K} - \text{combinaisons linéaires de diagrammes de } P_2^* \}$

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,

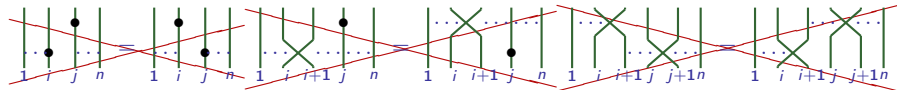
Présentations de 2-catégories linéaires

► **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,

The diagrammatic equation illustrates the nil Hecke algebra relations. It consists of four terms connected by equals signs. Each term is a diagram with vertical strands labeled 1, i, j, n. The first term shows a dot on strand j above a dot on strand i. The second term shows a dot on strand i above a dot on strand j. The third term shows a crossing between strands i and i+1, with a dot on strand j above the crossing. The fourth term shows a crossing between strands i and i+1, with a dot on strand j below the crossing. The equation shows that the dot on strand j can be moved past the crossing between strands i and i+1, and that the dot on strand i can be moved past the crossing between strands i and i+1.

Présentations de 2-catégories linéaires

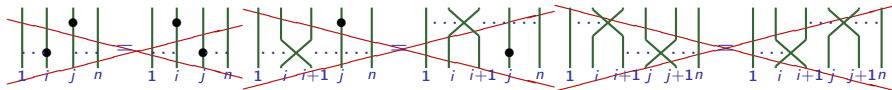
- ▶ **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,



- ▶ Ce sont des relations d'échange.

Présentations de 2-catégories linéaires

► **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,



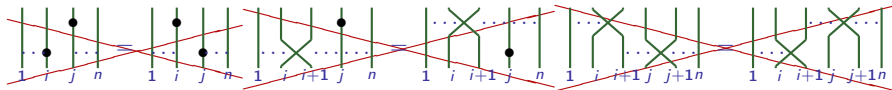
► Ce sont des relations d'échange.

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = 0, \quad \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

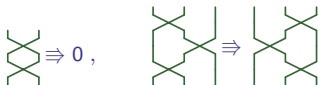
$$\begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \diagup \end{array} - \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

Présentations de 2-catégories linéaires

- **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,

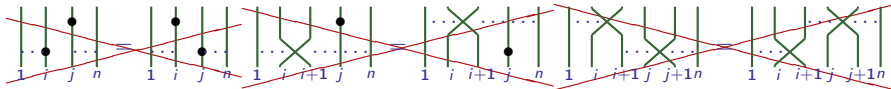


- Ce sont des relations d'échange.

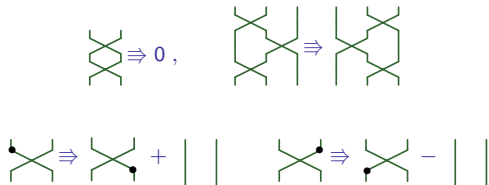


Présentations de 2-catégories linéaires

- **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,



- Ce sont des relations d'échange.

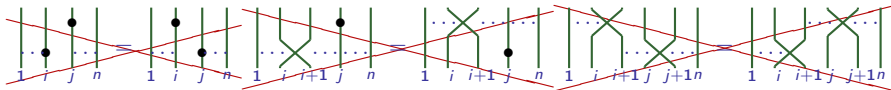


- Ce choix d'orientation définit un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire présentant une 2-catégorie linéaire qui encode les algèbres nil Hecke:

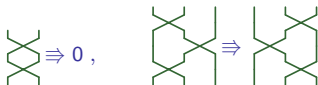
$$\text{End}_{\mathcal{C}}(n) \simeq \mathcal{NH}_n$$

Présentations de 2-catégories linéaires

- ▶ **Exemple** : Pour les algèbres nil Hecke,



- ▶ Ce sont des relations d'échange.



- ▶ Ce choix d'orientation définit un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire présentant une 2-catégorie linéaire qui encode les algèbres nil Hecke:

$$\text{End}_{\mathcal{C}}(n) \simeq \mathcal{NH}_n$$

- ▶ Il est **monomial à gauche**, i.e. chaque source d'une 3-cellule est un monome.

- ▶ Restriction sur les réécritures autorisées :

Réécriture linéaire

- ▶ Restriction sur les réécritures autorisées : si $u \rightarrow v$, alors $-u \rightarrow -v$, et donc

$$v = (u + v) - u \rightarrow u + v - v = u.$$

Réécriture linéaire

- ▶ Restriction sur les réécritures autorisées : si $u \rightarrow v$, alors $-u \rightarrow -v$, et donc

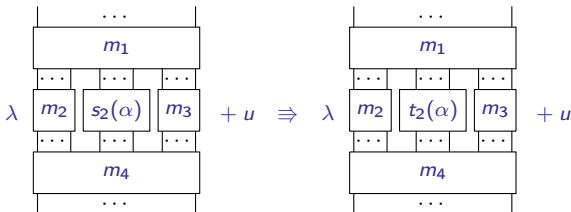
$$v = (u + v) - \cancel{u} + u + v - v = u.$$

Réécriture linéaire

- Restriction sur les réécritures autorisées : si $u \rightarrow v$, alors $-u \rightarrow -v$, et donc

$$v = (u + v) - \cancel{u} + v - v = u.$$

- Une **étape de réécriture** d'un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est une 3-cellule de la forme

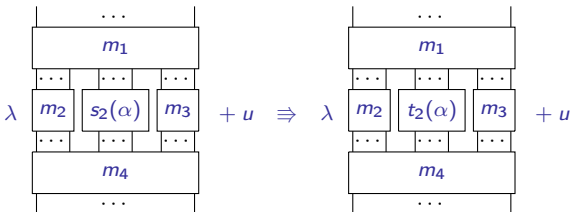


où $\alpha \in P_3$, et t.q. le monome $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition en monomes de u .

- Restriction sur les réécritures autorisées : si $u \rightarrow v$, alors $-u \rightarrow -v$, et donc

$$v = (u + v) - \cancel{u} + v - v = u.$$

- Une **étape de réécriture** d'un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est une 3-cellule de la forme



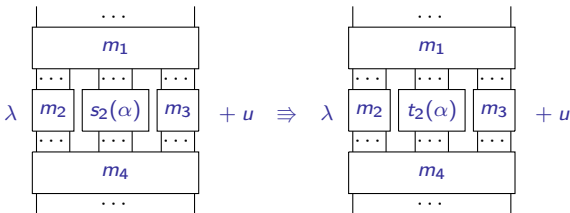
où $\alpha \in P_3$, et t.q. le monome $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition en monomes de u .

- **Lemme de Newman**: Un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire terminant est confluent ssi il est localement confluent.

- Restriction sur les réécritures autorisées : si $u \rightarrow v$, alors $-u \rightarrow -v$, et donc

$$v = (u + v) - \cancel{u} + v - v = u.$$

- Une **étape de réécriture** d'un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est une 3-cellule de la forme



où $\alpha \in P_3$, et t.q. le monome $m_1 * (m_2 * s_2(\alpha) * m_3) * m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition en monomes de u .

- **Lemme de Newman**: Un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire terminant est confluent ssi il est localement confluent.
- **Lemme des branchements critiques**: Un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire **terminant** est localement confluent ssi ses branchements critiques sont confluents.

Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.

Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.

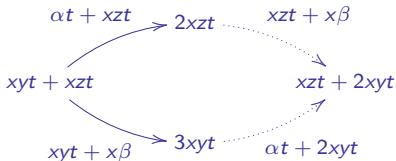
Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.
- ▶ Considérons le branchement :

$$\begin{array}{ccc} & \alpha t + xzt & \rightarrow 2xzt \\ & \nearrow & \\ xyt + xzt & & \\ & \searrow & \\ & xyt + x\beta & \rightarrow 3xyt \end{array}$$

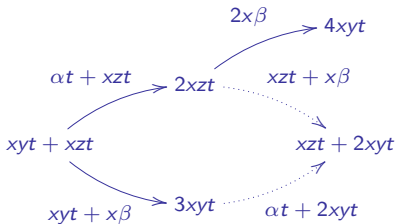
Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.
- ▶ Considérons le branchement :



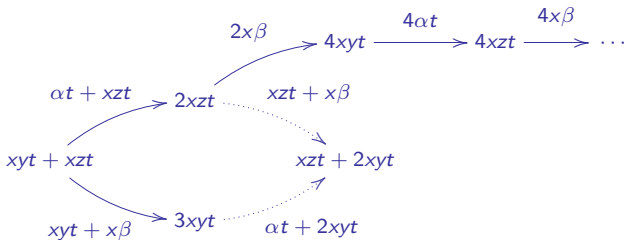
Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.
- ▶ Considérons le branchement :



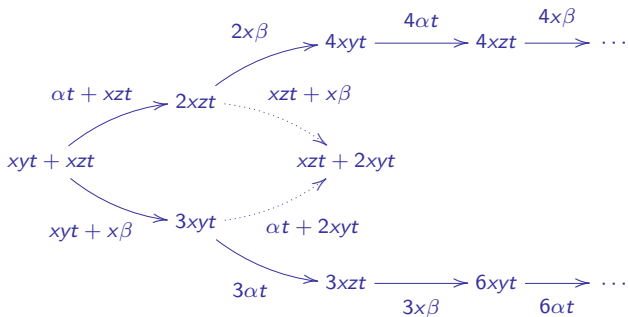
Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.
- ▶ Considérons le branchement :



Réécriture linéaire sans terminaison

- ▶ Soit un système de réécriture linéaire sur les générateurs x, y, z et relations $\alpha : xy \rightarrow xz$ et $\beta : zt \rightarrow 2yt$.
- ▶ Il n'a pas de branchement critique.
- ▶ Considérons le branchement :



Branchements critiques de $(3,2)$ -polygraphes linéaires

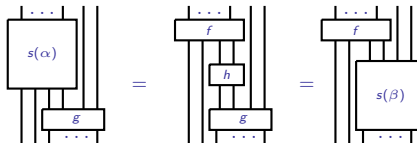
- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.

Branchements critiques de $(3,2)$ -polygraphes linéaires

- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.
- ▶ Trois formes différentes de branchements critiques:

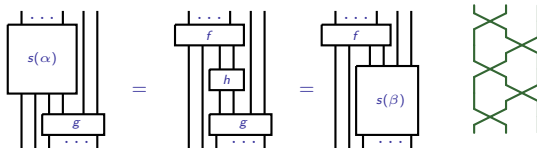
Branchements critiques de $(3, 2)$ -polygraphes linéaires

- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.
- ▶ Trois formes différentes de branchements critiques:
 - ▶ Réguliers:



Branchements critiques de $(3,2)$ -polygraphes linéaires

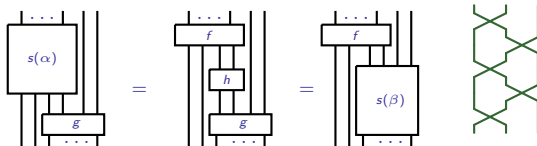
- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.
- ▶ Trois formes différentes de branchements critiques:
 - ▶ Réguliers:



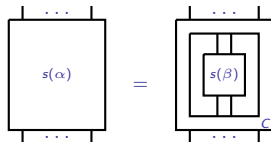
Branchements critiques de $(3,2)$ -polygraphes linéaires

- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.
- ▶ Trois formes différentes de branchements critiques:

- ▶ **Réguliers:**



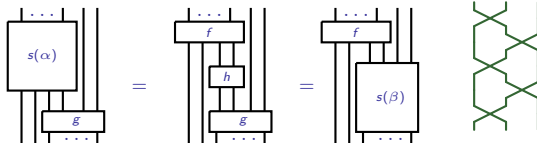
- ▶ **Inclusion:**



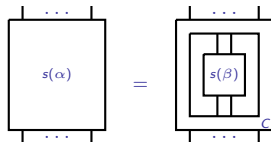
Branchements critiques de $(3,2)$ -polygraphes linéaires

- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.
- ▶ Trois formes différentes de branchements critiques:

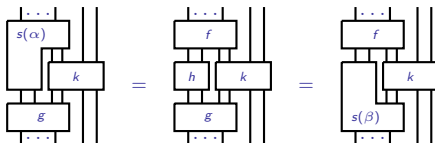
- ▶ **Réguliers:**



- ▶ **Inclusion:**



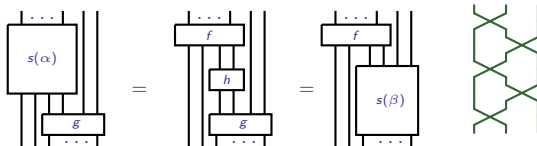
- ▶ **Indexés à droite (où indexés à gauche, multi-indexés):**



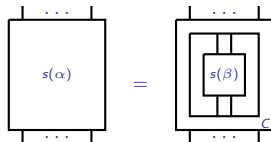
Branchements critiques de $(3,2)$ -polygraphes linéaires

- ▶ Un branchement critique est un branchement sur un diagramme minimal.
- ▶ Trois formes différentes de branchements critiques:

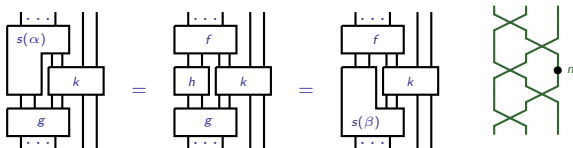
- ▶ **Réguliers:**



- ▶ **Inclusion:**



- ▶ **Indexés à droite (où indexés à gauche, multi-indexés):**



- ▶ Soit P $(3, 2)$ -polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.

Calcul de bases linéaires

- ▶ Soit P $(3, 2)$ -polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par P .

- ▶ Soit P $(3, 2)$ -polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par P .
- ▶ **Théorème [Alleaume '16]:** Pour toutes 1-cellules parallèles p, q de \mathcal{C} , l'ensemble des monomes en forme normale pour P avec 1-source p et 1-but q est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p, q)$.

Calcul de bases linéaires

- ▶ Soit P $(3, 2)$ -polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par P .
- ▶ **Théorème [Alleaume '16]:** Pour toutes 1-cellules parallèles p, q de \mathcal{C} , l'ensemble des monomes en forme normale pour P avec 1-source p et 1-but q est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p, q)$.
 - ▶ Terminaison: les monomes en forme normale engendrent $\mathcal{C}_2(p, q)$.

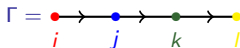
- ▶ Soit P $(3, 2)$ -polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par P .
- ▶ **Théorème [Alleaume '16]:** Pour toutes 1-cellules parallèles p, q de \mathcal{C} , l'ensemble des monomes en forme normale pour P avec 1-source p et 1-but q est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p, q)$.
 - ▶ Terminaison: les monomes en forme normale engendrent $\mathcal{C}_2(p, q)$.
 - ▶ Confluence: si une 2-cellule se réduit en deux combinaisons linéaires de monomes en forme normale, elles sont égales puisque P est monomial à gauche.

Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- ▶ Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorification d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .

Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- ▶ Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorification d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .
- ▶ Soit Γ le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , avec ensemble de sommets I , vus comme des couleurs:



Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- ▶ Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorification d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .
- ▶ Soit Γ le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , avec ensemble de sommets I , vus comme des couleurs:



Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- ▶ Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorification d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .

- ▶ Soit Γ le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , avec ensemble de sommets I , vus comme des couleurs:



- ▶ Soit $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i \cdot i$ un élément de $\mathbb{N}[I]$, on considère l'ensemble $\text{Seq}(\mathcal{V})$ des suites d'éléments de Γ où i apparaît ν_i fois.

Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- ▶ Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorification d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .

- ▶ Soit Γ le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , avec ensemble de sommets I , vus comme des couleurs:



- ▶ Soit $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i \cdot i$ un élément de $\mathbb{N}[I]$, on considère l'ensemble $\text{Seq}(\mathcal{V})$ des suites d'éléments de Γ où i apparaît ν_i fois.

- ▶ **Exemple:** $\text{Seq}(2i + k) = \{iik, iki, kii\}$

Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- ▶ Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorification d'un groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} .

- ▶ Soit Γ le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , avec ensemble de sommets I , vus comme des couleurs:



- ▶ Soit $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i \cdot i$ un élément de $\mathbb{N}[I]$, on considère l'ensemble $\text{Seq}(\mathcal{V})$ des suites d'éléments de Γ où i apparaît ν_i fois.

▶ **Exemple:** $\text{Seq}(2i + k) = \{iik, iki, kii\}$

- ▶ Pour un tel \mathcal{V} , on définit une algèbre $R(\mathcal{V})$.

- ▶ **Théorème [Khovanov-Lauda '08]:** Si $R = \bigoplus_{\mathcal{V} \in \mathbb{N}[I]} R(\mathcal{V})$,

$$K_0(R - \text{pmod}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g})$$

Présentation des algèbres de Hecke carquois

- ▶ Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \text{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

Présentation des algèbres de Hecke carquois

► Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \text{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

$$x_{k,\mathbf{i}} = \begin{array}{c} | \quad \dots \quad | \quad \dots \quad | \\ i_1 \quad \quad i_k \quad \quad i_m \end{array} \quad \text{et} \quad \tau_{k,\mathbf{i}} = \begin{array}{c} | \quad \quad \quad | \quad | \\ \dots \quad \quad \quad \times \quad \dots \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_m \end{array}$$

Présentation des algèbres de Hecke carquois

- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \text{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

$$x_{k,\mathbf{i}} = \begin{array}{c} | \dots | \bullet \dots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_m \end{array} \quad \text{et} \quad \tau_{k,\mathbf{i}} = \begin{array}{c} | \dots \diagdown \diagup \dots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_m \end{array}$$

- Relations:

- i) Même couleur:

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = 0 \quad \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \bullet \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

- ii) Couleurs distantes :

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array}$$

- iii) Couleurs proches :

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ | \end{array} + \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array}$$

- iv) Couleurs différentes :

$$\begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \bullet \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

- vi) Relations de "tresses"

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \quad \text{et sinon} \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

Présentation des algèbres de Hecke carquois

- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \text{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

$$x_{k,\mathbf{i}} = \begin{array}{c} | \dots | \bullet \dots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_m \end{array} \quad \text{et} \quad \tau_{k,\mathbf{i}} = \begin{array}{c} | \dots \diagdown \diagup \dots | \\ i_1 \quad i_k \quad i_{k+1} \quad i_m \end{array}$$

- Relations:

- i) Même couleur:

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \Rightarrow 0 \quad \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} | \quad | \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \bullet \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} | \quad | \end{array}$$

- ii) Couleurs distantes :

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} | \quad | \end{array}$$

- iii) Couleurs proches :

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} | \bullet \\ | \bullet \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \\ | \quad | \end{array}$$

- iv) Couleurs différentes :

$$\begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \bullet \\ \diagup \diagdown \bullet \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \bullet \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$$

- vi) Relations de "tresses"

$$\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} + \begin{array}{c} | \quad | \end{array} \quad \text{et sinon} \quad \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}$$

Présentation convergente

- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.

Présentation convergente

- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.
- ▶ Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.

Présentation convergente

- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.
 - ▶ Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
 - ▶ Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.

Présentation convergente

- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.
 - ▶ Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
 - ▶ Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.
 - ▶ Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
 - ▶ Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



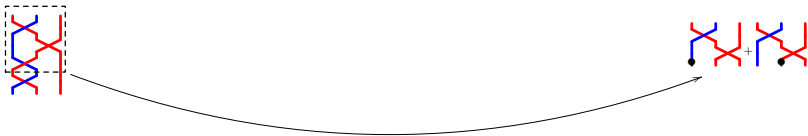
Présentation convergente

- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.
- ▶ Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- ▶ Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

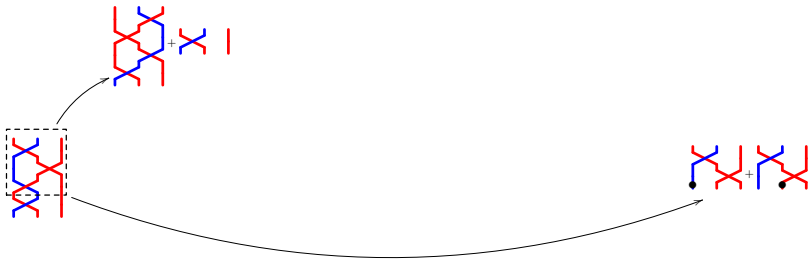
- ▶ **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.
- ▶ Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- ▶ Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

► **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.

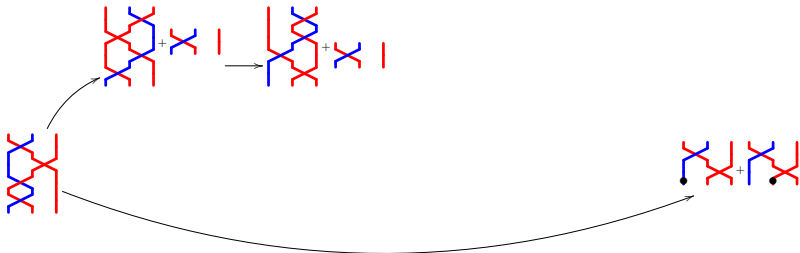
- Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

► **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.

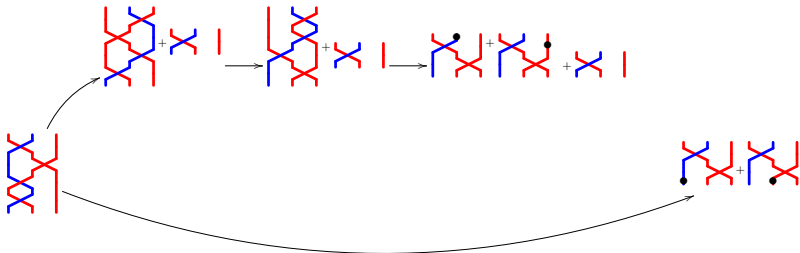
- Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

► **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.

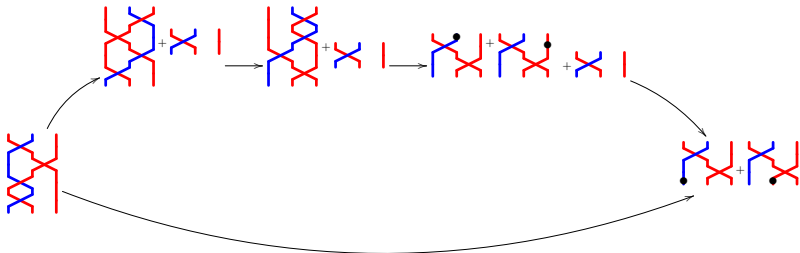
- Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

► **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.

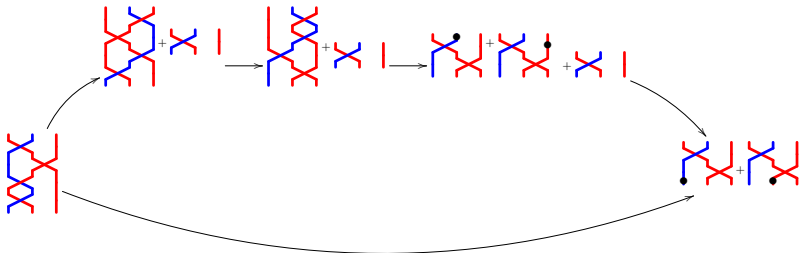
- Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



Présentation convergente

► **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$ -polygraphe linéaire est convergent.

- Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
- Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



► **Corollaire [Khovanov - Lauda '08]:** Les diagrammes de $R(\mathcal{V})$ correspondant à des permutations ajustées à gauche et minimales pour la présentation de Coxeter de \mathcal{S}_m ($m = |\mathcal{V}| = \sum_{i \in I} \nu_i$) et les points en bas des brins donnent une base de $R(\mathcal{V})$.

III. Extension à la réécriture modulo

Réécriture modulo

- ▶ Certaines relations structurelles rendent l'analyse combinatoire des branchements critiques difficile.

Réécriture modulo

- ▶ Certaines relations structurelles rendent l'analyse combinatoire des branchements critiques difficile.
 - ▶ **Exemple:** Relations d'adjonctions dans des 2-catégories linéaires pivotales: pour toute 1-cellule p , il y a une 1-cellule \hat{p} telle qu'il existe des 2-cellules

$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1, \quad \begin{array}{c} \hat{p} \\ \cup \\ p \end{array}, \quad \begin{array}{c} \cup \\ \hat{p} \\ p \end{array} \text{ satisfaisant } \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array} = \begin{array}{c} | \\ p \end{array} = \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array}.$$

Réécriture modulo

- ▶ Certaines relations structurelles rendent l'analyse combinatoire des branchements critiques difficile.
 - ▶ **Exemple:** Relations d'adjonctions dans des 2-catégories linéaires pivotales: pour toute 1-cellule p , il y a une 1-cellule \hat{p} telle qu'il existe des 2-cellules

$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1, \quad \begin{array}{c} \hat{p} \\ \cup \\ p \end{array}, \quad \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array} \hat{p} \text{ satisfaisant } \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array} = \begin{array}{c} | \\ p \end{array} = \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array}.$$

- ▶ Réécriture modulo ces relations structurelles: R ensemble de relations orientées et E ensemble d'axiomes non orientés.

Réécriture modulo

- ▶ Certaines relations structurelles rendent l'analyse combinatoire des branchements critiques difficile.
 - ▶ **Exemple:** Relations d'adjonctions dans des 2-catégories linéaires pivotales: pour toute 1-cellule p , il y a une 1-cellule \hat{p} telle qu'il existe des 2-cellules

$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1, \quad \begin{array}{c} \hat{p} \\ \cup \\ p \end{array}, \quad \begin{array}{c} p \\ \cup \\ \hat{p} \end{array} \text{ satisfaisant } \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array} = | \begin{array}{c} p \end{array} = \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array}.$$

- ▶ Réécriture modulo ces relations structurelles: R ensemble de relations orientées et E ensemble d'axiomes non orientés.
- ▶ Paradigmes de réécriture modulo :
 - ▶ Réécriture avec des relations de R , mais confluence modulo E , [Huet '80](#).

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{R} & u' & \cdots \xrightarrow{R} & w \\ E \updownarrow & & & & \downarrow E \\ v & \xrightarrow{R} & v' & \cdots \xrightarrow{R} & w' \end{array}$$

Réécriture modulo

- ▶ Certaines relations structurelles rendent l'analyse combinatoire des branchements critiques difficile.
 - ▶ **Exemple:** Relations d'adjonctions dans des 2-catégories linéaires pivotales: pour toute 1-cellule p , il y a une 1-cellule \hat{p} telle qu'il existe des 2-cellules

$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1, \quad \begin{array}{c} \hat{p} \\ \cup \\ p \end{array}, \quad \begin{array}{c} p \\ \cup \\ \hat{p} \end{array} \text{ satisfaisant } \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array} = | \begin{array}{c} p \end{array} = \begin{array}{c} \cup \\ p \end{array}.$$

- ▶ Réécriture modulo ces relations structurelles: R ensemble de relations orientées et E ensemble d'axiomes non orientés.
- ▶ Paradigmes de réécriture modulo :
 - ▶ Réécriture avec des relations de R , mais confluence modulo E , Huet '80.

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{R} & u' & \cdots \xrightarrow{R} & w \\ E \Downarrow & & & & \Downarrow E \\ v & \xrightarrow{R} & v' & \cdots \xrightarrow{R} & w' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} u & \cdots \xrightarrow{E^R E} & v \\ E \Downarrow & & \Downarrow E \\ u' & \xrightarrow{R} & v' \end{array}$$

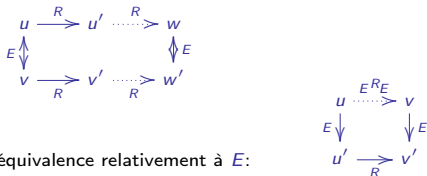
- ▶ Réécriture avec R sur des classes d'équivalence relativement à E :

Réécriture modulo

- ▶ Certaines relations structurelles rendent l'analyse combinatoire des branchements critiques difficile.
 - ▶ **Exemple:** Relations d'adjonctions dans des 2-catégories linéaires pivotales: pour toute 1-cellule p , il y a une 1-cellule \hat{p} telle qu'il existe des 2-cellules

$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1, \quad \begin{array}{c} \hat{p} \\ \cup \\ p \end{array}, \quad \begin{array}{c} p \\ \cup \\ \hat{p} \end{array} \text{ satisfaisant } \begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \cup \end{array} = | = \begin{array}{c} \cup \\ \cup \\ \cup \end{array}.$$

- ▶ Réécriture modulo ces relations structurelles: R ensemble de relations orientées et E ensemble d'axiomes non orientés.
- ▶ Paradigmes de réécriture modulo :
 - ▶ Réécriture avec des relations de R , mais confluence modulo E , Huet '80.



- ▶ Réécriture avec R sur des classes d'équivalence relativement à E :
- ▶ **Système de réécriture modulo:** (R, E, S) tel que $R \subseteq S \subseteq ER_E$, Jouannaud-Kirchner '84.

Lemme des branchements critiques modulo

- ▶ Définition de la structure de polygraphe (linéaire) modulo (R, E, S) .

Lemme des branchements critiques modulo

- ▶ Définition de la structure de polygraphe (linéaire) modulo (R, E, S) .

- ▶ S est **confluent modulo** E :

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{S^*} & u' \\ E \updownarrow & & \\ v & \xrightarrow{S^*} & v' \end{array}$$

Lemme des branchements critiques modulo

- Définition de la structure de polygraphe (linéaire) modulo (R, E, S) .

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{S^*} & u' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w \\ E \updownarrow & & & & \downarrow E \\ v & \xrightarrow{S^*} & v' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w' \end{array}$$

- S est **confluent modulo** E :

Lemme des branchements critiques modulo

- Définition de la structure de polygraphe (linéaire) modulo (R, E, S) .

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{S^*} & u' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w \\ E \updownarrow & & & & \downarrow E \\ v & \xrightarrow{S^*} & v' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w' \end{array}$$

- S est **confluent modulo** E :

- **Théorème [Huet '80, D. - Malbos '18] (Lemme de Newman modulo)** : Si ${}_E R_E$ termine, la confluence locale de S modulo E est équivalent à la confluence de S modulo E .

Lemme des branchements critiques modulo

- ▶ Définition de la structure de polygraphe (linéaire) modulo (R, E, S) .

$$\begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{S^*} & u' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w \\
 E \updownarrow & & & & \downarrow E \\
 v & \xrightarrow{S^*} & v' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w'
 \end{array}$$

- ▶ S est **confluent modulo** E :

- ▶ **Théorème [Huet '80, D. - Malbos '18] (Lemme de Newman modulo)** : Si ${}_E R_E$ termine, la confluence locale de S modulo E est équivalent à la confluence de S modulo E .

- ▶ **Théorème [D. - Malbos '18] (Lemme des branchements critiques modulo)** : Si ${}_E R_E$ termine, S est localement confluent modulo E ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{S^{*(1)}} & v & \cdots \xrightarrow{S^*} & v' \\
 \parallel \downarrow & & & & \downarrow E^T \\
 u & \xrightarrow{R^{*(1)}} & w & \cdots \xrightarrow{S^*} & w'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{S^{*(1)}} & v & \cdots \xrightarrow{S^*} & v' \\
 E^{T(1)} \downarrow & & & & \downarrow E^T \\
 u' & \cdots \xrightarrow{S^*} & & & w
 \end{array}$$

sont confluents modulo E .

Lemme des branchements critiques modulo

- ▶ Définition de la structure de polygraphe (linéaire) modulo (R, E, S) .

$$\begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{S^*} & u' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w \\
 E \updownarrow & & & & \downarrow E \\
 v & \xrightarrow{S^*} & v' & \cdots \xrightarrow{S^*} & w'
 \end{array}$$

- ▶ S est **confluent modulo** E :

- ▶ **Théorème [Huet '80, D. - Malbos '18] (Lemme de Newman modulo)** : Si ${}_E R_E$ termine, la confluence locale de S modulo E est équivalent à la confluence de S modulo E .

- ▶ **Théorème [D. - Malbos '18] (Lemme des branchements critiques modulo)** : Si ${}_E R_E$ termine, S est localement confluent modulo E ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{S^{*(1)}} & v & \cdots \xrightarrow{S^*} & v' \\
 \parallel \downarrow & & & & \downarrow E^T \\
 u & \xrightarrow{R^{*(1)}} & w & \cdots \xrightarrow{S^*} & w'
 \end{array} & & \begin{array}{ccccc}
 u & \xrightarrow{S^{*(1)}} & v & \cdots \xrightarrow{S^*} & v' \\
 E^T(1) \downarrow & & & & \downarrow E^T \\
 u' & \cdots \xrightarrow{S^*} & & & w
 \end{array} \\
 & & & & \text{\color{red} } ER \subseteq S
 \end{array}$$

sont confluents modulo E .

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par $R \amalg E$.

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par $R \amalg E$.
- ▶ Supposons:
 - ▶ E est convergent,
 - ▶ S termine,
 - ▶ S est confluent modulo E .

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par $R \amalg E$.
- ▶ Supposons:
 - ▶ E est convergent,
 - ▶ S termine,
 - ▶ S est confluent modulo E .
- ▶ Soit $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par $R \amalg E$.
- ▶ Supposons:
 - ▶ E est convergent,
 - ▶ S termine,
 - ▶ S est confluent modulo E .

- ▶ Soit $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

$$u \xRightarrow{S^*} \sum \hat{u}_i,$$

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par $R \amalg E$.
- ▶ Supposons:
 - ▶ E est convergent,
 - ▶ S termine,
 - ▶ S est confluent modulo E .

- ▶ Soit $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

$$u \xRightarrow{S^*} \sum \hat{u}_i, \quad \hat{u}_i \xrightarrow{NF(E)} \sum v_{i,k}.$$

Bases linéaires par confluence modulo

- ▶ Soit (R, E, S) un $(3, 2)$ -polygraphe linéaire modulo monomial à gauche.
- ▶ Soit \mathcal{C} la 2-catégorie linéaire présentée par $R \amalg E$.
- ▶ Supposons:
 - ▶ E est convergent,
 - ▶ S termine,
 - ▶ S est confluent modulo E .

- ▶ Soit $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

$$u \xRightarrow{S^*} \sum \hat{u}_i, \quad \hat{u}_i \xrightarrow{NF(E)} \sum v_{i,k}.$$

- ▶ **Théorème [D. '19]** L'ensemble $\{v_{i,k} \text{ ainsi définis} \mid u \in \mathcal{C}_2(p, q)\}$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p, q)$.

Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- ▶ Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire présentée par:

Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

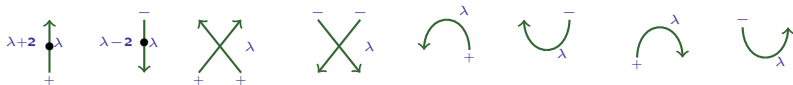
- ▶ Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire présentée par:
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de l'algèbre de Kac-Moody,

Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- ▶ Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire présentée par:
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de l'algèbre de Kac-Moody,
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)}) \text{ with } \varepsilon_i \in \{-, +\}\}$.

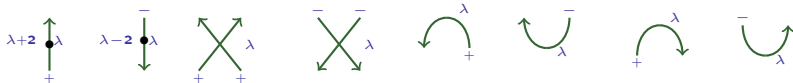
Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- ▶ Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire présentée par:
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de l'algèbre de Kac-Moody,
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)}) \text{ with } \varepsilon_i \in \{-, +\}\}$.
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ est l'ensemble de 2-cellules génératrices



Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- ▶ Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire présentée par:
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de l'algèbre de Kac-Moody,
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)}) \text{ with } \varepsilon_i \in \{-, +\}\}$.
 - ▶ $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ est l'ensemble de 2-cellules génératrices



- ▶ soumis aux relations suivantes:

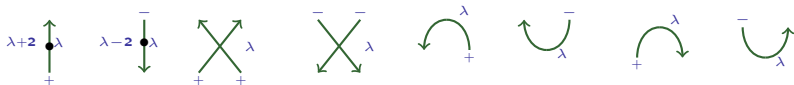
Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

► Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire présentée par:

► $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de l'algèbre de Kac-Moody,

► $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)}) \text{ with } \varepsilon_i \in \{-, +\}\}$.

► $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ est l'ensemble de 2-cellules génératrices



► soumis aux relations suivantes:

► Relations des algèbres KLR pour les deux orientations.

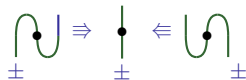
► Relations de bulles:

$$n \circlearrowleft_{\lambda} \Rightarrow \begin{cases} 1_{\mathbf{1}_{\lambda}} & \text{if } n = h - 1 \\ 0 & \text{if } n < h - 1 \end{cases} ; \quad \lambda \circlearrowright_n \Rightarrow \begin{cases} 1_{\mathbf{1}_{\lambda}} & \text{if } n = -\lambda - 1 \\ 0 & \text{if } n < -\lambda - 1 \end{cases}$$

$$\lambda - \mathbf{1} + \alpha \circlearrowleft_{\lambda} \Rightarrow - \sum_{l=1}^{\alpha} h - \mathbf{1} + \alpha - l \circlearrowleft_{\lambda} \circlearrowright_{\lambda}^{-\lambda - \mathbf{1} + l} \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha > 0$$

Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

► Axiomes d'isotopie:



Exemple: La 2-catégorification $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

► Axiomes d'isotopie:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ \text{---} \end{array} \Leftarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \cap \\ \text{---} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} | \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \Leftarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}$$

► Relations quantiques:

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array}^\lambda \Rightarrow -\uparrow\downarrow^\lambda + \sum_{n=0}^{\lambda-1} \sum_{r \geq 0} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}^{\lambda-n-r-2}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}^\lambda \Rightarrow -\downarrow\uparrow^\lambda + \sum_{n=0}^{-\lambda-1} \sum_{r \geq 0} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}^{-n-r-2}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}^\lambda \Rightarrow \sum_{n=0}^{\lambda} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}^{-n-1}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array}^\lambda \Rightarrow -\sum_{n=0}^{-\lambda} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}^{-n-1}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \diagup \\ \text{---} \end{array}^\lambda \Rightarrow -\sum_{n=0}^{-\lambda} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}^{-n-1}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \diagdown \\ \text{---} \end{array}^\lambda \Rightarrow \sum_{n=0}^{\lambda} \begin{array}{c} \text{---} \\ \cup \\ \bullet \\ \text{---} \\ \cap \\ \bullet \\ \text{---} \end{array}^{-n-1}$$

► Relations "bubble slide".

Conclusion

- ▶ Développer des heuristiques de calculs dans diverses catégories diagrammatiques.

Conclusion

- ▶ Développer des heuristiques de calculs dans diverses catégories diagrammatiques.
 - ▶ Catégorifications de $U_q(\mathfrak{g})$ en non simplement lacé, catégorifications de Heisenberg, ...

Conclusion

- ▶ Développer des heuristiques de calculs dans diverses catégories diagrammatiques.
 - ▶ Catégorifications de $U_q(\mathfrak{g})$ en non simplement lacé, catégorifications de Heisenberg, ...
- ▶ Obtenir des preuves explicites de catégorifications par réécriture.
 - ▶ Catégorification de produits tensoriels de modules de Verma sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, travail en cours (avec [G. Naisse](#)).

Conclusion

- ▶ Développer des heuristiques de calculs dans diverses catégories diagrammatiques.
 - ▶ Catégorifications de $U_q(\mathfrak{g})$ en non simplement lacé, catégorifications de Heisenberg, ...
- ▶ Obtenir des preuves explicites de catégorifications par réécriture.
 - ▶ Catégorification de produits tensoriels de modules de Verma sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, travail en cours (avec [G. Naisse](#)).
- ▶ Étendre ces constructions au cadre des super catégories monoïdales et 2-supercatégories.

The diagram shows an equality between two configurations of boxes and strands. On the left, a box labeled ϕ is positioned above a box labeled ψ . The top of the ϕ box has three dots, and the bottom of the ψ box has three dots. On the right, the boxes are swapped: ψ is above ϕ . The top of the ψ box has three dots, and the bottom of the ϕ box has three dots. The two configurations are separated by an equals sign, with the sign factor $(-1)^{|\psi||\phi|}$ placed between them.

Conclusion

- ▶ Développer des heuristiques de calculs dans diverses catégories diagrammatiques.
 - ▶ Catégorifications de $U_q(\mathfrak{g})$ en non simplement lacé, catégorifications de Heisenberg, ...
- ▶ Obtenir des preuves explicites de catégorifications par réécriture.
 - ▶ Catégorification de produits tensoriels de modules de Verma sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, travail en cours (avec [G. Naisse](#)).
- ▶ Étendre ces constructions au cadre des super catégories monoïdales et 2-supercatégories.

The diagram shows an equality between two configurations of boxes and strands. On the left, a box labeled ϕ is positioned above a box labeled ψ . Each box has several strands entering from the top and exiting from the bottom. On the right, the boxes are swapped, with ψ above ϕ . The two configurations are separated by an equals sign, with the sign factor $(-1)^{|\psi||\phi|}$ placed between them.

- ▶ Étude de la odd-catégorification de $U_q(\mathfrak{g})$ pour une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} , travail en cours (avec [M. Ebert](#) et [A. Lauda](#)).

Conclusion

- ▶ Développer des heuristiques de calculs dans diverses catégories diagrammatiques.
 - ▶ Catégorifications de $U_q(\mathfrak{g})$ en non simplement lacé, catégorifications de Heisenberg, ...
- ▶ Obtenir des preuves explicites de catégorifications par réécriture.
 - ▶ Catégorification de produits tensoriels de modules de Verma sur $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, travail en cours (avec [G. Naisse](#)).
- ▶ Étendre ces constructions au cadre des super catégories monoïdales et 2-supercatégories.

The diagram shows an equality between two configurations of boxes and strands. On the left, a box labeled ϕ is on top of a box labeled ψ , with strands entering from the bottom and exiting from the top. On the right, the boxes are swapped, with ψ on top of ϕ . The two configurations are separated by an equals sign and a sign factor $(-1)^{|\psi||\phi|}$. Ellipses indicate multiple strands.

- ▶ Étude de la odd-catégorification de $U_q(\mathfrak{g})$ pour une algèbre de Kac-Moody symétrisable \mathfrak{g} , travail en cours (avec [M. Ebert](#) et [A. Lauda](#)).
- ▶ Développer une bibliothèque de calcul implémentable pour analyser la confluence de telles présentations.

Merci pour votre attention.