# Fiche de révision

**5.1. Réels, intervalles ouverts.** —
inégalités triangulaires : $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ et $\Big||x|-|y|\Big| \leqslant |x-y|$.
$I$ intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ : $\exists a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, I = ]a, b[$
dans ce cas $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset I$
$a$ *approximation* de $b$ à $\varepsilon$ près si $|a-b| < \varepsilon$

**5.2. Limite d'une suite.** —

— Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell$ si

pour tout intervalle ouvert $I$ contenant $\ell$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $u_n \in I$.

ou, de façon équivalente,

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant n_0) \implies |u_n - \ell| < \varepsilon\ .$$

On note alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \text{ou bien} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell\ .$$

— limite $+\infty$ :

$$\forall M \in \mathbf{R},\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant n_0) \implies u_n > M\ .$$

— si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors celle-ci est unique.

— $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *convergente* si elle admet une limite dans $\mathbf{R}$,
$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *divergente* si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite.

— si $\exists \phi, \psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissantes tq $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ avec $\ell_1 \neq \ell_2$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet aucune limite.

— si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1+\ell_2$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1\ell_2$.

— si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}^*$, alors $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ell}$.

— *Théorème des gendarmes.* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}, (w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suites réelles. Si

(i) $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;

(ii) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ .

Alors $(v_n)_{n\in\mathbf{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

# Exercices

## Réels, approximation, encadrements

**Exercice 5.1. (*)**
Dans chacun des cas suivants, dire si on a bien une approximation avec la marge indiquée, ou sinon la corriger.

(a) $3,14$ est une approximation de $\pi$ à 0,01 près.

(b) $3,1416$ est une approximation de $\pi$ à 0,001 près.

(c) $3,1416$ est une approximation de $\pi$ à $10^{-5}$ près.

(d) $1,41$ est une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-3}$ près.

(e) $2,72$ est une approximation de e à $10^{-2}$ près.

**Exercice 5.2. (*)** Donner l'ensemble des points adhérents aux ensembles suivants :

(a) $[0,1[$ ,

(b) $[0,1]$ ,

(c) $]-1,0[\cup]0,1[$ ,

(d) $\mathbf{Z}$ ,

(e) $]0,1[\cap\mathbf{Q}$ .

**Exercice 5.3. (*)** Soit $x$ un réel strictement positif.

1. Montrer que $x > 10 \Rightarrow \left|\frac{2\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{5}$
2. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 5.4. (*)** Soit $b \in [1,+\infty[$.

1. Montrer que
$$a \geqslant b \Rightarrow 1-\frac{1}{b} \leqslant 1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2} \leqslant 1+\frac{1}{b}$$
2. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 5.5. (*)** Soit $a \in [0,1/2]$. Montrer que
$$|b| \leqslant \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{3} \leqslant \frac{a+b}{1+a} \leqslant \frac{3a}{2}$$

**Exercice 5.6. (**)** Soit $c \geqslant 1$.

1. Montrer que si $y$ est tel que $0 \leqslant y \leqslant 1-\frac{1}{c}$, alors
$$\frac{1}{1-y} \leqslant 1+cy$$

2. Soit $b$ un réel supérieur à 10. Montrer que
$$a \geqslant b \Rightarrow a \leqslant \frac{a^2+a+1}{a-5} \leqslant a\left(1+\frac{14}{b}\right)$$
3. Lorsqu'on approche un réel $A$ par un autre réel $B$, on appelle erreur relative la valeur $|B-A|/|A|$. Montrer que si $a \geqslant 14.10^k$, avec $k$ un entier naturel, on peut approcher $\frac{a^2+a+1}{a-5}$ par $a$ avec une erreur relative inférieure ou égale à $10^{-k}$.

**Quantifications multiples**

**Exercice 5.7. (**)** Pour tous $i$ et $j$ entiers naturels non nuls, on note $P(i,j)$ l'assertion "$j$ est un multiple de $i$".

1. Pour visualiser les choses, essayer de représenter $P$ sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
   (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^*, j \geqslant J \Rightarrow P(i,j)$
   (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^*$ tel que $(j \geqslant J$ et $P(i,j))$

**Exercice 5.8. (**)** Pour tous $i$ et $j$ entiers naturels non nuls, on note $P(i,j)$ l'assertion "$\frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{i}$".

1. Essayer de représenter $P$ sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse (c'est-à-dire démontrer l'assertion ou sa négation).
   (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^*, j \geqslant J \Rightarrow P(i,j)$
   (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^*$ tel que $(j \geqslant J$ et $P(i,j))$

**Exercice 5.9. (**)** Soit $u$ une suite de nombres entiers dont toutes les valeurs sont dans $\{0,1,2\}$. Pour tout entier $j \geqslant 3$ et tout entier $i \geqslant 1$, on note $P(i,j)$ l'assertion "$\left|\frac{1}{j-u_j}\right| \leqslant \frac{1}{i}$".

1. Essayer de représenter $P$ sous la forme d'un tableau de vrai (V) et de faux (F) ayant une infinité de lignes et de colonnes.
2. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifiez votre réponse (c'est-à-dire démontrer l'assertion ou sa négation).
   (a) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \exists J \in \mathbf{N}^*, \forall j \in \mathbf{N}^* \cap [3,+\infty[, j \geqslant J \Rightarrow P(i,j)$
   (b) $\forall i \in \mathbf{N}^*, \forall J \in \mathbf{N}^*, \exists j \in \mathbf{N}^* \cap [3,+\infty[$ tel que $(j \geqslant J$ et $P(i,j))$

(c) La suite $j \mapsto \frac{1}{j-u_j}$ admet-elle une limite ? Si oui, que vaut-elle ?

## Limites de suites

### Exercice 5.10. (*)

Pour chacune des suites suivantes, trouver deux entiers $N_{10}$ et $N_{100}$ tels que les assertions

$$\forall n \geq N_{10}, |u_n| < \frac{1}{10}$$

$$\forall n \geq N_{100}, |u_n| < \frac{1}{100}$$

soient vraies.

(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$,

(d) $u_n = 2^{-n}$,

(e) $u_n = 10^{-n}$,

(f) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(g) $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(h) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{3^n}$.

### Exercice 5.11. (*/**)

Pour chacune des suites suivantes et pour tout réel strictement positif $\varepsilon$, trouver un entier $N_\varepsilon$ tel que l'assertion

$$\forall n \geq N_\varepsilon, |u_n| < \varepsilon$$

soit vraie.

(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$,

(b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$,

(c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$,

(d) $u_n = 2^{-n}$,

(e) $u_n = 10^{-n}$,

(f) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(g) $u_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^{-n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$,

(h) $u_n = \dfrac{\cos(n)}{3^n}$.

### Exercice 5.12. (**)

Pour chacune des suites suivantes, dire si la suite est périodique, majorée, minorée, bornée, convergente, si elle tend vers $\pm\infty$, ou si elle diverge (démontrez toutes vos réponses). Si elle est convergente, déterminer sa limite.

(a) $u_n = (-1)^n$,
(b) $u_n = \frac{1}{n}$,
(c) $u_n = \frac{1}{n^2}$,
(d) $u_n = \frac{n}{n+1}$,
(e) $u_n = (-1)^n$,
(f) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$,
(g) $u_n = \cos(n)$,
(h) $u_n = 2^{-n}$,
(i) $u_n = n + (-1)^n$,
(j) $u_n = n + (-1)^n n$,
(k) $u_n = \frac{n+1}{n^2}$.
(l) $u_n = \frac{2n^2+n+3}{n^2}$.

**Exercice 5.13. (*)**

Montrer que si $\ell$ est un nombre réel, et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite tendant vers $\ell$, alors on peut en déduire des approximations de $\ell$ aussi bonnes que l'on veut.

**Exercice 5.14. (*)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs entières. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang (ce qu'on peut traduite par l'assertion $\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$).

**Exercice 5.15. (**)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs réelles.

— Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
— Si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle nécessairement convergente ?
— Montrer que si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes et admettent la même limite $\ell$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\ell$.
— Montrer que si les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

**Exercice 5.16. (**)***Le nombre d'or*

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   La solution positive, notée $\phi$, est appelée « nombre d'or ».
2. Démontrer qu'on a $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

   On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit. On pose $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $|u_{n+1} - \phi| \leqslant \frac{4}{9}|u_n - \phi|$. (Utiliser la question 2.)
5. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a
$$|u_n - \phi| \leqslant (\frac{4}{9})^n .$$
6. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
7. Déterminer un entier $n$ tel que $u_n$ est une approximation de $\phi$ à $10^{-6}$ près.

**Exercice 5.17. (**)** *Racines carrées, méthode égyptienne*

On présente un algorithme pour obtenir des approximations de racines carrées. Soit $a$ un nombre réel plus grand que 1 dont on cherche à déterminer la racine carrée. On suppose qu'on sait déterminer la partie entière $\lfloor\sqrt{a}\rfloor$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit : on part de $u_0 = \lfloor\sqrt{a}\rfloor + 1$, et on définit par récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et qu'on a $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} > \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer qu'on a $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{|u_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}}$ .
3. En déduire que la suite $u_n$ tend vers $\sqrt{a}$.
4. Déterminer un entier $n$ tel que $u_n$ est une approximation de $\sqrt{a}$ à $10^{-6}$ près.

**Exercice 5.18. (**)**

Soit $u_0$ un entier positif quelconque. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par
$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \\ u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair} \end{cases}$$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle croissante ? décroissante ?
2. Montrez que, pour toute valeur initiale $u_0 \in \mathbf{N}^*$, l'assertion
$$\exists N \in \mathbf{N}, u_N = 1.$$
est vraie.

(Si on remplace $u_n + 1$ par $3u_n + 1$ dans la définition, alors c'est un problème ouvert de savoir si l'assertion est vraie. Cela s'appelle le *problème de Syracuse*.)

### Limites de fonctions

**Exercice 5.19. (**)**

Dans cet exercice, on note $f$ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2$.

1. Soient $a, b$ des nombres réels tels que $a < b$.
   (a) Trouver un nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de $a$ et de $b$ tel que
   $$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C_{a,b}|x - y|.$$
   (b) On admet que $\pi \in [3, 4]$. Combien de décimales de $\pi$ suffit-il de connaître pour calculer $\pi^2$ avec une erreur $< 10^{-5}$ ?
   (c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de $f$ à l'intervalle $[a, b]$ est continue.
2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que
   $$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|?$$
3. L'application $f$ est-elle continue ?

**Exercice 5.20. (**)** Dans cet exercice, on note $f$ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^3$.

1. Soient $x$ et $y$ des nombres réels. Développer et simplifier l'expression
   $$(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$
2. Soit $M$ un nombre réel *strictement positif*. À l'aide de la question précédente, démontrer l'assertion suivante
   $$\forall x, y \in [-M, M], \quad |x^3 - y^3| \leqslant 3M^2|x - y|.$$
3. On admet que $\pi \leqslant 4$. On suppose que $x$ est un nombre réel tel que $|x - \pi| < 10^{-6}$. Majorer l'erreur commise en utilisant $x^3$ comme valeur approchée de $\pi^3$.
4. Démontrer, *en utilisant la définition d'une limite*, que pour tout $a \in \mathbf{R}$, $x^3$ tend vers $a^3$ quand $x$ tend vers $a$. (Indication : on pourra prouver que si $|x - a| < 1$ alors $|x| \leqslant |a| + 1$ et utiliser la question 2).

**Exercice 5.21. (**)**

Dans cet exercice, on note $f$ la fonction de $\mathbf{R}^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1. Soient $a, b$ des nombres réels tels que $0 < a < b$.
   (a) Trouver une nombre réel $C_{a,b}$ dépendant uniquement de $a$ et de $b$ tel que
   $$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C_{a,b}|x - y|.$$

(b) On admet que $\pi \in [3,4]$. Combien de décimales de $\pi$ suffit-il de connaître pour calculer $\frac{1}{\pi}$ avec une erreur $< 10^{-5}$ ?

(c) Démontrer en utilisant la définition de la limite que la restriction de $f$ à l'intervalle $[a,b]$ est continue.

2. Existe-t-il une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^*, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|?$$

3. L'application $f$ est-elle continue sur son domaine de définition ?

**Exercice 5.22. (**)**

On note $f$ la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Déterminer l'ensemble $A$ des solutions de l'équation $f(x) = 1$.
3. Déterminer l'ensemble $B$ des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Démontrer que 0 est adhérent à chacun des ensembles $A$ et $B$.
5. Démontrer que $f$ n'admet pas de limite en 0.

**Exercice 5.23. (**)**

Soit $f$ une fonction à valeur réelle définie sur une partie $\mathscr{D}_f$ de $\mathbf{R}$. On désigne par $a$ un nombre réel adhérent à $\mathscr{D}_f$. Soit $l \in \mathbf{R}$.

1. Démontrer que, si $f$ admet pour limite $l$ en $a$, alors

$$\exists M \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) < M. \tag{36}$$

Une fonction qui vérifie (36) est dite *localement majorée au voisinage de a*. (Indication : on pourra démontrer que $M = l + 1$ convient).

2. De même, démontrer que si $f$ admet pour limite $l$ en $a$ alors

$$\exists m \in \mathbf{R},\ \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall x \in \mathscr{D}_f,\ |x-a| < \eta \Longrightarrow f(x) > m.$$

3. On suppose que la fonction $f$ est donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}(\sin(1/x) + 1)$.
   (a) Donner dans ce cas le domaine de définition de $f$.
   (b) Démontrer que $f$ n'admet pas de limite en 0.

**Exercice 5.24. (**)**

Calculer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$
3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$
4. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$
5. $\lim\limits_{x \to 1} \left( \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3x}{1-x^3} \right)$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$, on pourra faire le changement de variable $y^6 = 1 + x$

**Exercice 5.25. (***)**

Soit $f$ une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $I$ de $\mathbf{R}$. On suppose que $f(I) \subset I$ et que $f$ est continue. Soit $a \in I$. On note $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ l'unique suite d'éléments de $I$ qui vérifie les conditions suivantes

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une limite $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

**Exercice 5.26. (***)**

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. En utilisant uniquement la définition de dérivabilité donnée dans le cours, émontrer que l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto x^n$ est dérivable. Calculer sa dérivée.
2. Démontrer que toute fonction polynomiale est dérivable et donner une formule pour calculer sa dérivée.