Fiche de révision

- point A du plan $\mapsto$ affixe $z_A \in \mathbf{C}$.
- distance entre A et B : $|z_B - z_A|$.
- mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$: argument de $(z_B - z_C)/(z_A - z_C)$.
- transformations :
    - translation de vecteur $\vec{a}$: $f(z) = z + z_a$.
    - homothétie de rapport r et de centre A : $f(z) - z_A = r(z - z_A)$.
    - rotation centre A et d'angle θ : $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_A)$.
    - symétrie orthogonale par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$: $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_A})$
    - symétrie glissée par rapport à la droite passant par A et de vecteur directeur $r\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$: $f(z) - z_A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\overline{z} - \overline{z_A}) + r\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}$.
- similitude plane de rapport λ : transformation φ telle que $d(\varphi(A), \varphi(B)) = \lambda d(A, B)$.

    isométrie : similitude de rapport 1.
- caractérisation des similitudes : ou bien $f(z) = az + b$ (similitude directe), ou bien $f(z) = a\bar{z} + b$ (similitude indirecte) .

Exercices

Exercice 4.1. (*)

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + \mathrm{i} \text{ et } z_B = 1 + 2\mathrm{i}$$

On note O l'origine.

1. Les points O, A et B sont-ils alignés ?
2. On note C le point d'affixe $-1 - \mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Quelle est l'affixe du centre de ce parallélogramme ?

Exercice 4.2. (*)

Soient A, B, C, D quatre points du plan. Soient I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$, $[A, C]$, $[B, D]$.

1. En utilisant les nombres complexes, montrer que les segments $[I, K]$, $[J, L]$ et $[M, N]$ ont le même milieu.
2. Montrer que le quadrilatère de sommets I, J, K, L est un parallélogramme.

Exercice 4.3. (**)

Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbf{C}$

1. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - \mathrm{i}| = 1\}$,
2. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - 1 + \mathrm{i}| \leq \sqrt{2}\}$,
3. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}((1 + \mathrm{i})z) = 0\}$,
4. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Im}((3 - 2\mathrm{i})z) = 2\}$,
5. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \arg\left(\dfrac{z-2}{z}\right) = 0\}$,
6. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2}\}$,
7. $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \arg\left(\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = \pi\}$.

Exercice 4.4. (***)

Le but de l'exercice est d'exprimer $\cos(\frac{2\pi}{5})$ à l'aide des opération usuelles. On en déduira une façon de construire un pentagone régulier à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

1. Soit P le polynome défini par $P(z) = z^5 - 1$. Quelles sont les racines complexes de P, exprimées sous forme polaire ?

2. Soit Q le polynome défini par $Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Montrer qu'on $Q(z) \times (z-1) = P(z)$. En déduire que les racines complexes de Q sont les nombres $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$, $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$.
3. Pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{2\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{2\pi}{5})$? et pourquoi l'inverse de $\cos(\frac{4\pi}{5}) + i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$ est-il le nombre $\cos(\frac{4\pi}{5}) - i\,\sin(\frac{4\pi}{5})$?
4. En utilisant l'égalité $Q(z) = z^2(z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2})$, montrer que si z est racine de Q, alors $(z + z^{-1})$ est racine du polynôme R défini par $R(y) = y^2 + y - 1$.
5. Déterminer les racines de R et montrer qu'elles sont réelles. On les note y_1, y_2 avec $y_1 > 0$.
6. En utilisant les questions 3, 4, 5 et 6, montrer qu'on a $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
7. Étant donné un segment dont la longueur est 1, comment construire un segment dont la longueur est $\sqrt{5}$ à l'aide d'une règle non graduée, d'une équerre, et d'un compas ? (penser à Pythagore)
8. En déduire comment construire un segment dont la longueur est $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
9. En déduire comment construire à partir d'un repère orthonormé le point de coordonnées $(\cos(\frac{2\pi}{5}), \sin(\frac{2\pi}{5}))$ à la règle et au compas.
10. Comment construire un pentagone régulier à la règle et au compas ?

Exercice 4.5. (**)

À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe $f(z) = (z - 4\mathrm{i})/(z+2)$. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. L'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel est un cercle.
2. L'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est réel est une droite privée d'un point.
3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)$ est imaginaire pur est un cercle privé d'un point.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ est un cercle.
5. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ est une droite privée d'un point.
6. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ est une droite.

Exercice 4.6. (*)

L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}z - 1$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. une translation.
2. une homothétie de rapport i.
3. une rotation.
4. une rotation dont le centre est le point d'affixe 1.
5. une rotation dont le centre est le point d'affixe $-(1+\mathrm{i})/2$.
6. une rotation d'angle $-\pi/2$.

Exercice 4.7. (*)
L'application qui à un point d'affixe z associe le point d'affixe $\mathrm{i}\,\overline{z}$ est (vrai ou faux et pourquoi) ?

1. une homothétie de rapport i.
2. une rotation.
3. une symétrie.
4. la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
5. la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Exercice 4.8. (*)
Décrire chaque transformation suivante du plan complexe en donnant son type (translation, rotation, homothétie, symétrie, autre ?) et ses caractéristiques (vecteur, angle, centre, rapport, droite, etc).

1. $z \mapsto z + \mathrm{i}$
2. $z \mapsto z + 2 - \mathrm{i}$
3. $z \mapsto \mathrm{i}z - 1$
4. $z \mapsto -z - 2\mathrm{i}$
5. $z \mapsto (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z - 2$
6. $z \mapsto (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z/2 + 2$
7. $z \mapsto -\overline{z}$

Exercice 4.9. (**)
Donner la forme des transformations suivantes, vues comme applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$:

1. une translation de vecteur d'affixe $1+\mathrm{i}$,
2. une homothétie de centre 1 et de rapport 2,
3. une rotation de centre $-\mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$,
4. la composée d'une rotation de centre 1 et d'angle $2\pi/3$ (d'abord) et d'une translation de vecteur d'affixe 1 (ensuite),
5. la composée d'une translation de vecteur d'affixe 1 (d'abord) et d'une rotation de centre 1 et d'angle $2\pi/3$ (ensuite),

Exercice 4.10. (**)

On considère des transformations du plan dans lui-même, vues comme applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que la composée de deux translations est une translation.
2. Montrer que la composée de deux rotations est une rotation ou une translation. À quelle condition sur les angles a-t-on une translation ?
3. Montrer que la composée de deux symétries axiales est une rotation ou une translation. À quelle condition sur les axes a-t-on une translation ?

Exercice 4.11. (**)

Soit A, B deux points du plan. On considère les rotations r_A, r_B de centres respectifs A, B et d'angle π.

1. Montrer que la composée $r_B \circ r_A$ est une translation.
2. On suppose qu'on a un point C tel que $r_A(r_B(r_A(r_B(C)))) = C$. Montrer qu'alors les points A et B sont confondus.

Exercice 4.12. (**)

Soit A, B, C trois points du plan. On considère les rotations r_A, r_B, r_C de centres respectifs A, B, C et d'angle $2\pi/3$.

1. Montrer que la composée $r_C \circ r_B \circ r_A$ est une translation.
2. À quelle condition sur A, B, C la composée $r_C \circ r_B \circ r_A$ est-elle l'application identité $z \mapsto z$?

Exercice 4.13. (**)

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$. Soit A, B, C trois points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si on a $z_A + j\,z_B + j^2\,z_C = 0$ ou $z_A + j^2\,z_B + j\,z_C = 0$.

Exercice 4.14. (**) Soit f l'application de $\mathbf{C} - \{0\}$ dans $\mathbf{C}$ qui à z associe $-\frac{1}{z}$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Quelle est l'image de $\mathscr{C}$ par f ?
2. Montrer que si M est différent de O et à l'intérieur de $\mathscr{C}$, le point M' d'affixe $f(z)$ est en dehors de $\mathscr{C}$.
3. Montrer que l'image du cercle $\mathscr{C}'$ de centre $-1/2$ et de rayon $1/2$ est la droite passant par 1 et tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice 4.15. (***)

On va démontrer le théorème de Napoléon (pour savoir si l'empereur a effectivement démontré ce théorème, rendez-vous sur Wikipedia ou sur https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/pe/node19.html).

Soit A, B, C trois points quelconques du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. On suppose qu'on tourne autour de ABC dans le sens trigonométrique direct. On construit à l'extérieur du triangle ABC trois triangles équilatéraux ABI, BCJ et CAK. On note P, Q, R les centres de ces triangles équilatéraux.

1. Donner les affixes des points I et P en fonction de z_A et z_B.
2. Donner de mêmes les affixes des points J, K, Q, R en fonction de z_A, z_B et z_C.
3. Montrer que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 4.16. (***) *Inverses et commutateurs*

On considère des transformations du plan dans lui-même, vues comme applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

1. Soit f une transformation affine, c'est-à-dire de la forme $z \mapsto az + b$. Montrer qu'il existe une unique transformation affine g telle que la composition $g \circ f$ soit l'identité. Montrer que dans le cas, la transformation $f \circ g$ est aussi l'identité.

   La transformation g est alors appelée l'*inverse* de f, et notée f^{-1}.
2. Montrer que l'inverse d'une translation est une translation, et l'inverse d'une rotation une rotation dont on déterminera l'angle.
3. Étant donné deux transformations f et g, on appelle *commutateur* de f et g, noté $[f, g]$ la transformation $g^{-1} \circ f^{-1} \circ g \circ f$. Montrer que si f et g sont deux transformations affines, alors leur commutateur est une translation.
4. Montrer que le commutateur de deux translations est l'identité.
5. À quelle condition le commutateur de deux rotations est-il l'identité ? (On pourra utiliser le fait qu'une translation est l'identité si et seulement si elle a un point fixe.)
6. À quelle condition le commutateur de deux homothéties est-il l'identité ?
7. Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan. Montrer qu'il existe une unique transformation affine envoyant A en B et D en C, on la note f_1.
8. De façon semblable on note f_2 l'unique transformation envoyant A en C et D en B. Montrer que le commutateur $[f_1, f_2]$ est l'identité.