Fiche de révision

3.1. Applications. — $f : E \to F$ application (ou fonction)
E ensemble de départ, F ensemble d'arrivée
pour $A \subset E$, $f(A) = \{f(a)\,;\, a \in A\} = \{b \in B \,|\, \exists a \in A, f(a) = b\}$ *image de A par f*
pour $B \subset F$, $f^{-1}(B) = \{a \in A \,|\, f(a) \in B\}$ *image-réciproque de B par f*
f injective :

$$\forall x, y \in E,\ (f(x) = f(y)) \implies (x = y)$$

f surjective :

$$\forall z \in F, \exists x \in E,\ f(x) = z$$

f bijective :

$$f \text{ injective} \quad \text{et} \quad f \text{ surjective}$$

si f est bijective, on définit $\begin{array}{rcl} f^{-1} : F & \to & E \\ x & \mapsto & f^{-1}(x) \text{ tq } f(f^{-1}(x)) = x\ . \end{array}$.

$f : E \to F$, $g : F \to G$ applications
$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$ *composée de g et f.*
E ensemble fini, *cardinal de E* : unique entier n tq $\exists f : [\![1, n]\!] \to E$ bijective
principe d'inclusion-exclusion : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
principe de multiplication : $|A \times B| = |A| \times |B|$

3.2. Sommes et produits. — A ensemble fini et $f : A \to \mathbf{C}$ application, alors

$$\sum_{a \in A} f(a) \quad \text{et} \quad \prod_{a \in A} f(a)$$

désignent la somme et le produit des nombres $f(a)$, où a parcourt tout A.
$[\![p, q]\!] := \{p, p+1, p+2, \ldots, q-1, q\} = \{k \in \mathbf{Z} \,|\, p \leq k \leq q\}$
pour $p, q \in \mathbf{Z}$, et $f : [\![p, q]\!] \to \mathbf{C}$, on simplifie la notation en

$$\sum_{a=p}^{q} f(a) := \sum_{a \in [\![p,q]\!]} f(a) \quad \text{et} \quad \prod_{a=p}^{q} f(a) := \prod_{a \in [\![p,q]\!]} f(a)$$

factorielle :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k\ .$$

3.3. Dénombrement. — E ensemble, permutation de E = bijection de E dans E
$\mathfrak{S}_n$ = ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$
$|\mathfrak{S}_n| = n!$
$n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}$, $\binom{n}{k}$ = nombre de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k
$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \in [\![0, n]\!]$
formule du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3.4. Identités remarquables. — somme des premiers entiers : $\forall n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

somme de série géométrique : $\forall p, q \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{C}$,

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = \frac{x^{q+1} - x^p}{x - 1} .$$

somme de série géométrique (variante) : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{C}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k \right) .$$

formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall a, b \in \mathbf{C}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} .$$

Exercices

Fonctions, applications

Exercice 3.1. (*)
On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. Parmi les ensembles suivant, dire lesquels sont les graphes d'une application d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Lorsque l'ensemble est le graphe d'une application, donner son ensemble de départ.

1. $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y - x + 1 = 0 \}$;
2. $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 \}$;
3. $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2 \}$;
4. $\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2 \text{ et } y \geqslant 0 \}$.

Exercice 3.2. (**) Soient I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La fonction f s'annule.
2. La fonction f est la fonction nulle.
3. La fonction f n'est pas une fonction constante.
4. La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La fonction f présente un minimum.
6. La fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes.
7. La fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 3.3. (**)
Pour chacune des affirmations suivantes, décrire en termes simples les applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui vérifient ces affirmations :

1. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(y) = f(x)$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, f(x) < f(y)$.
5. $\forall x \in \mathbf{R}, (x \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0)$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0)$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, (x > 0 \Rightarrow f(x) > 0)$.

8. $\forall x \in \mathbf{R}, (x = 0 \Rightarrow f(x) = 0)$.
9. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) = 0 \Rightarrow x = 0)$.
10. $\forall x \in \mathbf{R}, (f(x) \leqslant 0 \text{ ou } f(x) \geqslant 0)$.

Exercice 3.4. (*)
Soient f et g les applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = 2n \qquad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f,\ f \circ g,\ g \circ g,\ g \circ g \circ g$.

Exercice 3.5. (**)
Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle « fonction indicatrice de A » et on note $\mathbf{I}_A$ l'application de E vers $\{0, 1\}$ qui à $x \in E$ associe 1 si $x \in A$, 0 si $x \notin A$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{^cA}(x) = 1 - \mathbf{I}_A(x)$.
2. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cap B}(x) = \min\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.
3. $\forall x \in E\,,\ \mathbf{I}_{A\cup B}(x) = \max\{\mathbf{I}_A(x), \mathbf{I}_B(x)\} = \mathbf{I}_A(x) + \mathbf{I}_B(x) - \mathbf{I}_A(x)\,\mathbf{I}_B(x)$.

Exercice 3.6. (**)
Soient E et F deux ensembles, f une application de E vers F. Soient A et A' deux sous-ensembles de E. Soient B et B' deux sous-ensembles de F. Quelles sont les assertions parmi les assertions suivantes qui sont toujours vraies ?

1. $(A \subset A') \implies (f(A) \subset f(A'))$.
2. $(B \subset B') \implies (f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B'))$.
3. $f(A \cup A') = (f(A) \cup f(A'))$.
4. $f^{-1}(B \cup B') = (f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'))$.
5. $f(A \cap A') = (f(A) \cap f(A'))$.
6. $f^{-1}(B \cap B') = (f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'))$.
7. $f^{-1}(f(A)) = A$.
8. $f(f^{-1}(B)) = B$.
9. $f(A \cap f^{-1}(B)) = (f(A) \cap B)$.
10. $f(A \cup f^{-1}(B)) = (f(A) \cup B)$.

Exercice 3.7. (*) Soit A une partie de $\mathbf{R}$ et f une application de A dans $\mathbf{R}$.

1. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose que $A =]-1;1[\cup]2,3[$, que f est dérivable sur A et que $f'(x) > 0$ pour tout x dans A. Peut-on en déduire que f est injective ?

Exercice 3.8. (**) Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1. Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
2. Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante ?

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow g \text{ injective.}$$

Exercice 3.9. (**) Soit f une application de E dans F. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est injective,

(ii) $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 3.10. (*) Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et f une application de I dans $\mathbf{R}$. On suppose que f est continue sur I.

1. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer que $f(I)$ est un intervalle.
2. On considère la fonction f de $I =]-\infty;2]$ dans $\mathbf{R}$, définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Montrer que f réalise une bijection de I sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 3.11. (**) Soit f l'application de $[0,1[$ dans $]0,2]$ définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1[& \to &]0,2] \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 2x+1 & \text{si} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x-1 & \text{si} & x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ?
3. L'application f est-elle bijective ?
4. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\left(f(x) \geqslant \frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow \left(x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \right)$$

Sommes et produits

Exercice 3.12. (*)

Calculer les nombres suivants.

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} 1\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\,,$$

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\,,\quad \sum_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} h\,,$$

$$\prod_{k=1}^{3}\sum_{h=1}^{k} k\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} h\,,\quad \prod_{k=1}^{3}\prod_{h=1}^{k} k\,.$$

Exercice 3.13. (*)

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre variables. Ecrire à l'aide des symboles $\sum$ et $\prod$ les quantités suivantes.

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2. $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$.
3. $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4. $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5. $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$.
6. $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

Exercice 3.14. (**)

Démontrer par récurrence les assertions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbf{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = (n+1)(n+2)/2.$
2. $\forall n \in \mathbf{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$
3. $\forall n \in \mathbf{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4.$
4. $\forall n \in \mathbf{N}\,,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$

5. $\forall n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$

6. $\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 3$, $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k} = \frac{(n+2)!}{12n(n-1)}.$

7. $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1).$

Dénombrement

Exercice 3.15. (*) Soient p et q deux entiers naturels non nuls et soit f la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\} & \to & \{1,\ldots,pq\} \\ (i,j) & \mapsto & j + (i-1)q \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est bien définie (i.e que ses images sont bien dans $\{1,\ldots,pq\}$) et que c'est une bijection.

2. Cette bijection correspond à énumérer les cases d'un tableau à p lignes et q colonnes en le parcourant de gauche à droite, ligne par ligne en partant de la première ligne. Donner une bijection correspondant à l'énumération du même tableau, mais en le parcourant de haut en bas, colonne par colonne, en partant de la première colonne.

Exercice 3.16. (**) Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathscr{A}_{n,2}$ l'ensemble des couples de deux éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$. Pour a dans $\{1,\ldots,n\}$, on note E_a l'ensemble des couples de deux éléments distincts de $\{1,\ldots,n\}$ dont la première coordonnée est a.

1. Quel est le cardinal de E_a ?

2. Montrer que si a et a' sont distincts, alors E_a et $E_{a'}$ sont disjoints.

3. Montrer que
$$\mathscr{A}_{n,2} = \bigcup_{a\in\{1,\ldots,n\}} E_a$$
et représenter cette relation par un arbre de dénombrement.

4. En déduire que $|\mathscr{A}_{n,2}| = n(n-1)$.

5. Montrer que $\mathscr{A}_{n,2}$ est en bijection avec l'ensemble des applications injectives de $\{1,2\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$.

Exercice 3.17. (*)

Une entreprise veut se donner un nouveau sigle, qui soit formé d'exactement 3 lettres. De combien de façons peut-elle le faire ? Combien reste-t-il de possibilités si on impose au sigle d'être formé de lettres distinctes ?

Exercice 3.18. (*)

On met dans une boîte 26 jetons de Scrabble, portant chacune des 26 lettres de l'alphabet (deux jetons distincts portent donc deux lettres distinctes). On en tire 3 à la fois. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?

Exercice 3.19. (*)

Une école de langues propose des cours d'arabe, de biélorusse, et de chinois. Chaque étudiant peut apprendre une, deux, ou trois langues, au choix. Il y a 100 étudiants en tout, il y en a 90 qui apprennent l'arabe, 70 le biélorusse et 50 le chinois.

1. Combien au minimum y a-t-il d'étudiants qui apprennent l'arabe et le biélorusse ? le biélorusse et le chinois ?
2. Combien au minimum y a-t-il d'étudiants qui apprennent les trois langues proposées ?

Exercice 3.20. (**)

1. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 100 qui ne sont divisibles ni par 5, ni par 7 ?
2. Combien y a-t-il de nombres entre 1 et 3000 qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5 ?

Exercice 3.21. (***)

1. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent par le mot « chat » ?
2. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent ni le mot « chat » ni le mot « chien » ?
3. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent ni le mot « chat » ni le mot « pie » ?
4. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet qui ne contiennent ni le mot « chat », ni le mot « chien », ni le mot « pie » ?

Exercice 3.22. (**) On a trois ensembles E_1, E_2, E_3. On suppose que chaque ensemble compte 100 éléments, que l'intersection de deux ensembles quelconques compte 10 éléments, et que l'intersection des trois ensembles ne compte qu'un élément. Quel est le cardinal de $E_1 \cup E_2 \cup E_3$?

Exercice 3.23. (**)
Dix personnes doivent s'asseoir autour d'une table circulaire. On considère comme identiques deux dispositions dont l'une se déduit de l'autre par une rotation. Combien y a-t-il de dispositions possibles ? Combien en reste-t-il si deux personnes données refusent d'être assises à côté ?

Exercice 3.24. (**)
Dans une course de chevaux, 10 chevaux sont au départ. Vous en choisissez 3 que vous classez pour jouer au tiercé. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. Il y a 3 tiercés dans le désordre.
2. Il y a 6 tiercés, dont 1 dans l'ordre.
3. Il y a $\binom{10}{3}$ tiercés possibles.
4. Il y a 720 ordres d'arrivée possibles.
5. Il y a plus de 3 millions d'ordres d'arrivée possibles.
6. Vous avez 720 choix différents.
7. Vous avez une chance sur 120 de gagner le tiercé dans l'ordre.
8. Vous avez une chance sur 120 de gagner, soit dans l'ordre, soit dans le désordre.

Exercice 3.25. (**)
Une association comprenant 20 membres dont 12 femmes et 8 hommes désire former un comité de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins deux hommes et deux femmes. Calculer de combien de façons on peut former ce comité dans chacun des cas suivants.

1. Chaque membre de l'association accepte d'en faire partie.
2. Deux des femmes refusent d'en faire partie.
3. Monsieur X et Madame Y refusent de siéger ensemble.

Identités remarquables

Exercice 3.26. (**)
Démontrer les égalités suivantes, en utilisant des manipulations et des identités algébriques (sans utiliser de récurrence).

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n\, n!$, $\forall n \geqslant 1$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}$, $\forall n \geqslant 2$.
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$, $\forall n \geqslant 1$.
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$, $\forall n \geqslant 2$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2^k = 2^n - 2$, $\forall n \geqslant 2$.
9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}2^{k/2} = \frac{2^n-1}{\sqrt{2}-1}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1}-1}{6}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
11. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k 3^{n-k} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{n-k} = \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{3}$.

Exercice 3.27. (**)

Démontrer, pour tout entier naturel n, les égalités suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ *(ajoutez les deux égalités précédentes).*
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k} = 3^n$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k-1}\binom{n}{k} = 9^n/2$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^{3k}3^{n-2k}\binom{n}{k} = (17/3)^n$.
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{i}^k\binom{n}{k} = 2^{n/2}\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/4}$.
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}3^{k/2}\mathrm{i}^k\binom{n}{k} = 2^n\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\pi/3}$.

Exercice 3.28. (**)

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f(x) = (1+x)^n$.

1. En utilisant une formule du cours, écrivez $f(x)$ comme une somme où interviennent les puissances de x.

2. La dérivée de f est $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. L'intégrale de f sur $[0,1]$ vaut
$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$
En utilisant la question 1. donner une autre expression de $f'(x)$ et de cette intégrale.
3. En déduire les valeurs des expressions suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 3.29. (**)

Soient n et p deux entiers naturels. Cet exercice présente une méthode générale pour calculer $\sum_{k=0}^{n} k^p$, sur le cas particulier $p=2$.

1. Soit $x \to P(x)$ une fonction, donner une expression plus simple de $\sum_{k=0}^{n}(P(k+1) - P(k))$.
2. Soit a, b, c des réels et $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx$. Calculer $P(x+1) - P(x)$.
3. Déterminer a, b, c de sorte que $P(x+1) - P(x) = x^2$.
4. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3.30. (***)

Le but de l'exercice est de calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$ pour tout n entier positif.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$ pour $n = 0, 1, 2$, et 3.
2. Utiliser la formule du binôme pour dévolopper l'expression $(1+1)^n$ et en déduire pour tout entier positif n l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. Pour tout n entier on note $T_0(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$, $T_1(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}$, et $T_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$.

Que vaut la somme $T_0(n) + T_1(n) + T_2(n)$?

4. On désigne par j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que j satisfait $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.
5. Démontrer $(\mathrm{j}+1)^{3n} = T_0(n)+\mathrm{j}T_1(n)+\mathrm{j}^2T_2(n)$ et $(\mathrm{j}^2+1)^{3n} = T_0(n)+\mathrm{j}^2T_1(n)+\mathrm{j}T_2(n)$.
6. Déduire des questions précédentes l'égalité
$$3T_0(n) = 2^{3n} + (\mathrm{j} + 1)^{3n} + (\mathrm{j}^2 + 1)^{3n}.$$
7. Montrer qu'on a $\mathrm{j} + 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\mathrm{j}^2 + 1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et en déduire l'égalité
$$T_0(n) = \frac{2^{3n} + 2(-1)^n}{3}.$$