Fiche de révision

2.1. Principaux symboles logiques introduits dans le chapitre. —

$\neg$	non	$\vee$	ou	$\wedge$	et
$\exists$	il existe	$\forall$	quelque soit		
$\Rightarrow$	implique	$\Leftrightarrow$	équivalent à		

2.2. Tables de vérités de base. —

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

2.3. Assertions et variables. —

variable libre : non introduite par un quantificateur

variable liée : introduite précédemment ou par un quantificateur

assertion close : pas de variable libre, ex :$\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - x = 0$. Une telle assertion est vraie ou fausse.

assertion ouverte : il y a des variables libres (ou paramètres), ex : $\exists x \in \mathbf{N}, x^2 - y = 0$. Une telle assertion n'est ni vraie ni fausse.

$P \Leftrightarrow Q$: les deux assertions sont équivalentes.

tautologie : assertion toujours vraie, quelles que soient les valeurs des variables libres ou des assertions qui la composent, ex 1 : $x^2 - x = x(x-1)$, ex 2 : $P \wedge (\neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \Rightarrow Q)$.

2.4. Règles de négation. — Les lettres P, Q et R désignent des assertions qui dans les cas e) et f) dépendent d'un paramètre. La lettre E désigne un ensemble.

a) $\neg(\neg P)$ équivaut à P ;

b) $\neg(P \vee Q)$ équivaut à $(\neg P) \wedge (\neg Q)$;

c) $\neg(P \wedge Q)$ équivaut à $(\neg P) \vee (\neg Q)$;

d) $\neg(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \wedge (\neg Q)$;

e) $\neg(\exists x \in E, P(x))$ équivaut à $\forall x \in E, (\neg P(x))$;

f) $\neg(\forall x \in E, P(x))$ équivaut à $\exists x \in E, (\neg P(x))$.

2.5. Règles de raisonnement. —

2.5.1. *Raisonnement direct.* — Pour démontrer Q, on démontre P et $P \Rightarrow Q$.

2.5.2. *Double-implication ou analyse synthèse.* — Pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on démontre l'implication $P \Rightarrow Q$ et l'implication-réciproque $Q \Rightarrow P$.

2.5.3. *Contraposée.* — Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$.

2.5.4. *Absurde.* — Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, on démontre $P \wedge (\neg Q) \Rightarrow \texttt{faux}$.

2.5.5. *Disjonction de cas.* — Si $P(x)$ est une assertion dépendant d'un paramètre $x \in A$ et si $A = B \cup C$, pour démontrer $(\forall x \in A, P(x))$, on démontre $(\forall x \in B, P(x))$ et $(\forall x \in C, P(x))$.

Pour $P(x)$ une assertion dépendant d'un paramètre $x \in A$, si $A = B \cup C$, pour démontrer $(\exists x \in A, P(x))$, on démontre $(\exists x \in B, P(x))$ ou $(\exists x \in C, P(x))$.

2.5.6. *Récurrence.* — Pour $P(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbf{N}$, pour démontrer $(\forall n \in \mathbf{N}, P(n))$, on démontre

$$P(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)\,.$$

2.5.7. *Récurrence forte.* — Pour $P(n)$ une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbf{N}$, pour démontrer $(\forall n \in \mathbf{N}, P(n))$, on démontre

$$P(0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ ((\forall m \in [\![0, n]\!], P(m)) \Rightarrow P(n+1))\,.$$

Exercices

Logique semi-mathématique, syllogismes

Exercice 2.1. (*)

(Deux compliments, d'après Godement, *Cours d'algèbre*). À la suite d'une représentation de *Pelléas et Mélisande*, un journaliste hésite entre les deux rédactions suivantes :

— Jamais le rôle de Mélisande n'a été si bien chanté.

— Jamais si jeune cantatrice, aux si beaux cheveux, n'a si bien chanté Mélisande.

Lequel de ces compliments est le plus fort ?

Exercice 2.2. (*) Parmi les raisonnements suivants, dire lesquels sont valides et lesquels sont invalides.

1. Tous les chats sont mortels, or Socrate est mortel, donc Socrate est un chat.
2. Tous les chats sont mortels, or Socrate est un chat, donc Socrate est mortel.
3. Si le soleil est là c'est le jour, or c'est le jour, donc le soleil est là.
4. Si le soleil est là c'est le jour, or c'est la nuit, donc le soleil n'est pas là.
5. Un petit pois ne peut être rouge et vert à la fois, or celui-ci est rouge, donc il n'est pas vert.
6. Un petit pois ne peut être rouge et vert à la fois, or celui-ci n'est pas rouge, donc il est vert.
7. Tout carré est un rectangle, et tout carré est un losange, donc tout rectangle est un losange.
8. Tout carré est un rectangle, et tout rectangle est un parallélogramme, donc tout carré est un parallélogramme.
9. Plus il y a de gruyère plus il y a de trous, et plus il y a de trous moins il y a de gruyère, donc plus il y a de gruyère moins il y a de gruyère.

Exercice 2.3. (**)

(D'après *Le livre qui rend fou*, de Raymond Smullyan) Un roi joueur désire laisser une chance à des condamnés. Il les amène devant un ensemble de portes derrière chacune desquelles se trouve un tigre ou une princesse. Sur les portes sont placardées des indications. Le prisonnier doit choisir une porte (on suppose que les prisonniers préfèrent les princesses aux tigres).

1. Pour le premier prisonnier il y deux portes. L'une des affiches dit la vérité, l'autre ment.

   Sur la première est écrit : "Il y a une princesse dans cette cellule et un tigre dans l'autre."

   Sur la seconde : "Il y a une princesse dans une cellule et il y a un tigre dans une cellule."

   Le prisonnier a-t-il intérêt à ouvrir une porte plutôt que l'autre, et si oui laquelle ?

2. Pour le second prisonnier, toujours deux portes. Cette fois par contre, soit les deux affiches disent la vérité, soit elles mentent toutes les deux.

   Sur la première : "Une au moins des deux cellules contient une princesse."

   Sur la seconde : "Il y a un tigre dans l'autre cellule."

3. Pour le troisième prisonnier, les règles sont les mêmes que pour le second.

   Première porte : "Il y a un tigre dans cette cellule ou il y a une princesse dans l'autre."

   Deuxième porte : "Il y a une princesse dans l'autre cellule."

4. Maintenant il y a trois portes, et le roi a placé une princesse et deux tigres exactement. De plus, seule une des trois affiches dit la vérité.

   Sur la première porte on lit : "Il y a un tigre ici."

   Sur la seconde : "Cette cellule contient une princesse."

   Sur la troisième : "Il y a un tigre dans la seconde cellule."

5. Il y a toujours une princesse et deux tigres, mais maintenant l'affiche collée sur la porte de la princesse dit la vérité tandis qu'une au moins des deux autres est fausse.

   Première porte : "Il y a un tigre dans la deuxième cellule."

   Deuxième porte : "Il y a un tigre ici."

   Troisième porte : "La première cellule contient un tigre."

Langage mathématique

Exercice 2.4. (*) Lorsque T est un tableau de nombres, on note $T(i,j)$ le contenu de la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On considère les 4 assertions suivantes, portant sur des tableaux ayant au moins 4 lignes et 4 colonnes.

$A : \forall i \in \{1,\dots,4\}, \forall j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$
$B : \forall i \in \{1,\dots,4\}, \exists j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$
$C : \exists i \in \{1,\dots,4\}, \forall j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$
$D : \exists i \in \{1,\dots,4\}, \exists j \in \{1,\dots,4\},\ T(i,j) = 1$

Pour chacun des tableaux ci-dessous, dire quelles sont les assertions vérifiées parmi A, B, C, et D.

(a) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\\hline 1&1&0&0\\\hline 0&0&0&1\\\hline 0&0&1&0\\\hline\end{array}$

(c) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0&1&0&1\\\hline 0&0&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&0&0&0\\\hline\end{array}$

(b) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}$

(d) $T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&0&0&1\\\hline 0&1&0&0\\\hline 0&1&0&0\\\hline 1&1&1&1\\\hline\end{array}$

Exercice 2.5. (*)

Écrire des assertions à l'aide de quantificateurs traduisant les énoncés suivants.

1. Tout nombre réel positif est le carré d'un nombre réel.
2. Tout entier pair est le double d'un entier.
3. Pour tout entier relatif, il existe un entier relatif plus grand.
4. Pour tout nombre réel, il existe un nombre rationnel tel que la différence des deux est plus petite que 0,1 en valeur absolue.
5. Tout nombre complexe non nul est le carré de deux nombres complexes distincts.
6. Il existe deux nombres réels irrationnels dont le produit est rationnel.

Exercice 2.6. (*)

Soit P, Q, R trois assertions, et a, b, c trois nombres réels. Écrire la négation des assertions suivantes.

1. $P \wedge (\neg Q)$
2. $(P \Longrightarrow Q) \wedge R$
3. $\exists x \in [1, +\infty[, a \geq b + x$
4. $\exists x \in \mathbf{R}_+, a = b + x$
5. $a = b = c$

Exercice 2.7. (**)

Pour chacune des assertions ci-dessous, dire quelles variables sont liées. Dire ensuite si l'assertion dépend d'un paramètre. Écrire chaque assertion en français. On rappelle qu'une assertion est *close* si elle ne dépend pas d'un paramètre. Dire pour chaque assertion close si elle est vraie ou fausse.

1. $x \geqslant y$.
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
5. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x \geqslant y$.
6. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{N}, x \geqslant y$.
7. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, x \geqslant y$.
8. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}, (x \geqslant y \text{ et } (\forall z \in \mathbf{Z}, x \geqslant z \Rightarrow y \geqslant z))$.

Exercice 2.8. (**)

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et le démontrer.

1. $1+1=2 \Longrightarrow 1+1=3$;
2. $1+1=3 \Longrightarrow 1+1=2$;
3. $1=0 \Longrightarrow (\exists a, b \in \mathbf{N}^*, a^2+b^2=0)$;
4. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 2 \Longrightarrow x \geq 3$;
5. $\forall x \in \mathbf{R}, x > 3 \Longrightarrow x \geq 3$;
6. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2,3] \Longrightarrow x \in [0,4]$;
7. $\forall x \in \mathbf{R}, x \in [2,3] \Longrightarrow x \leq 3$;
8. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2,3] \Longrightarrow x \geq 3$;
9. $\forall x \in \mathbf{R}, x \notin [2,+\infty] \Longrightarrow x \leq 3$;
10. $\forall x, y \in \mathbf{R}^*, x > y \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$;
11. $\exists x \in \mathbf{R}_+^*, x < \sqrt{x}$;
12. $\exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x+y > 0$;
13. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x+y > 0$;
14. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x+y > 0$;
15. $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, x+y > 0$;
16. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |x| < \varepsilon$;
17. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
18. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^*, \exists x \in \mathbf{R}, x < |\varepsilon|$;
19. $\exists t \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, |x| < t \Rightarrow x^2 < 3$;

Exercice 2.9. (*)

Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Ecrire en fonction de A, B, C les ensembles correspondant aux assertions suivantes.

1. x appartient aux trois.
2. x appartient au moins à l'un d'entre eux.

3. x appartient à deux d'entre eux au plus.
4. x appartient à l'un d'entre eux exactement.
5. x appartient à deux d'entre eux au moins.
6. x appartient à l'un d'entre eux au plus.

Assertions et tables de vérié

Exercice 2.10. (*)

Soient P, Q et R des assertions. À l'aide d'une table de vérité, vérifiez que l'implication

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)$$

est toujours vraie.

Exercice 2.11. (*)

Soit P et Q deux assertions, l'assertion $P \oplus Q$ (dire "P ou exclusif Q") est vraie si exactement l'une des deux assertions P et Q est vraie.

1. Donner la table de vérité de $P \oplus Q$ selon les vérités de P et Q.
2. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
3. Démontrer l'équivalence $P \oplus Q \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

Exercice 2.12. (**)

Soient P, Q et R trois assertions.

1. Simplifier l'expression $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee \neg Q \vee \neg R$.
2. Démontrer que $(P \wedge {}^{\neg}Q) \wedge \neg R = P \wedge {}^{R}(Q \vee R) = (P \wedge \neg R) \wedge \neg Q$.
3. Démontrer que $(P \vee Q \Rightarrow \neg R) \wedge (P \vee R \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (\neg R)$.

Raisonnements

Exercice 2.13. (*)

1. Écrire la contraposée de l'assertion $\forall x, y \in \mathbf{R}, (x + y) > 2 \Rightarrow (x > 1 \vee y > 1)$.
2. Démontrer l'assertion ou sa contraposée.
3. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 2.14. (*)
(Conjectures de Goldbach). La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Traduire les deux énoncés par des assertions mathématiques à l'aide de symboles.
2. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible. La conjecture faible implique-t-elle la conjecture forte ?

Remarque : En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.

Exercice 2.15. (*) Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{10^n-1}{9}$ est entier. (On pourra faire une récurrence.)

Exercice 2.16. (*) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que si la somme $a+b$ est irrationnelle (c'est-à-dire $a+b \notin \mathbf{Q}$), alors a ou b est irrationnel. (On pourra considérer la contraposée.)

Exercice 2.17. (*) Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \geq -2$. (On pourra procéder par analyse-synthèse.)

Exercice 2.18. (**)
On considère les propriétés suivantes de l'ordre total sur $\mathbf{R}$, valables pour tous a, b et c réels :

$$(a \leqslant b \text{ et } b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c \tag{26}$$

$$a \leqslant b \Rightarrow a+c \leqslant b+c \tag{27}$$

$$(a \leqslant b \text{ et } c \geqslant 0) \Rightarrow ac \leqslant bc \tag{28}$$

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $3x+2 \leqslant -2x+1$ d'inconnue x en utilisant uniquement (en ce qui concerne les propriétés de l'ordre total) les règles ci-dessus. À chaque étape, on indiquera la règle utilisée.
2. Montrer, en utilisant uniquement les règles (26) et (27), la règle suivante, valable pour tous réels a, b, c et d :
$$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d) \Rightarrow a+c \leqslant b+d$$
3. Montrer, en utilisant uniquement les règles (26), (27) et (28), la règle suivante :
$$(a \leqslant b \text{ et } c \leqslant 0) \Rightarrow ac \geqslant bc$$

4. Montrer, en utilisant uniquement la règle (28), la règle suivante :

$$(a < b \text{ et } c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

Exercice 2.19. (**)

En utilisant un raisonnement direct, montrer que

1. Si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivable et paire, alors sa dérivée f' est impaire.
2. Pour tout élément $x > 0$ de $\mathbf{Q}$, il existe un entier $n > 0$ tel que $n > x$.

Exercice 2.20. (**)

En utilisant un raisonnement par *disjonction des cas* (ou *cas par cas*),

1. Montrer l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q}) \vee (\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$.
2. Soient a et b deux réels, montrer qu'on a
$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$
$$\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$
3. Montrer que, quelque soit l'entier naturel $n \in \mathbf{N}$, 3 divise $n(n + 1)(2n + 1)$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que la somme $n + m$ soit impaire et le produit nm soit pair.
5. Trouver tous les réels x tels que $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 2.21. (**)

En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que

1. $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ n'est pas un rationnel.
2. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \ldots, a_n$, n réels de somme égale à 1. Alors un de ces réels est plus petit que $\frac{1}{n}$.

Exercice 2.22. (**)

En utilisant un raisonnement par analyse et synthèse,

1. Soit a, b deux nombres réels. Démontrer que l'assertion $\forall x \in [0, 1], ax + b \geq 0$ est équivalente à l'assertion $(b \geq 0 \wedge a + b \geq 0)$.

2. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles et distinctes du plan orienté. Soit A un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2. Construire un triangle équilatéral ABC tel que B appartient à D_1 et C appartient à D_2. Combien y a t-il de triangles possibles. (*On supposera qu'un tel triangle existe et on cherchera comment construire B ou C en utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$*)
3. Montrer que toute fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 2.23. (**)

1. Montrer à l'aide d'une récurrence que tout nombre entier $\geqslant 12$ peut s'écrire sous la forme $4a + 5b$, pour des entiers naturels a et b.
2. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $\forall n > 0, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n = 3^n - 2^n$.

Exercice 2.24. (**)

(Nombres de Fibonacci). On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence de la façon suivante :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les nombres de Fibonacci (F_n), pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, \forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}\,F_m + F_n F_{m+1}$ (on pourra fixer un entier $n \geqslant 2$ et démontrer $\forall m \geqslant 1, F_{n+m} = F_{n-1}\,F_m + F_n F_{m+1}$ par récurrence double.)
4. Démontrer l'assertion $\forall n \geqslant 2, F_n^2 = F_{n-1}\,F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

Exercice 2.25. (**)

(Une récurrence foireuse). La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, ils sont en fait tous égaux.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $P(n)$ l'assertion

« quels que soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}$, on a $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$. »

Montrons $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer, ce qui montre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $P(n)$.

Montrons $P(n+1)$.

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1} \in \mathbf{R}$.

D'après $P(n)$, on a déjà $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$.

Par ailleurs, si l'on pose $u'_1 = u_2, u'_2 = u_3, \ldots, u'_n = u_{n+1}$ et que l'on applique $P(n)$ à la famille $(u'_1, \ldots, u'_n)$, on obtient $u'_1 = \cdots = u'_{n-1} = u'_n$, c'est-à-dire $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$.

Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où est le problème ?

Exercice 2.26. (***) *Théorème de Helly en dimension 1*

Soit $n \geq 2$ un entier, et $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des intervalles de $\mathbf{R}$. On considère l'assertion suivante :

$$\text{si pour tous } i, j \in [\![1, n]\!] \text{ l'intersection } I_i \cap I_j \text{ est non vide,}$$
$$\text{alors l'intersection globale } \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} I_i \text{ est un intervalle non vide de } \mathbf{R}.$$

Pour simplifier, on ne considère que des intervalles fermés.

1. Faites un dessin pour $n = 3$ pour vous convaincre que l'assertion est vraie dans ce cas.
2. Montrer que l'assertion est fausse si on suppose seulement que $I_1, \ldots, I_n$ sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}$ et pas nécessairement des intervalles.
3. En utilisant la notion de min et de max, donner une preuve directe de l'assertion.
4. Le théorème est-il encore vrai s'il y a une infinité d'intervalles ?