Fiche de révision

1.1. Ensembles. —

- $\{1,2,3,4,5\}$: ensemble dont les éléments sont les nombres $1,2,3,4$, et 5.
- $\{x \in \{1,2,3,4,5\} \mid x \leq 3\}$: sous-ensemble de $\{1,2,3,4,5\}$ constitué des nombres inférieurs ou égaux à 3, c'est-à-dire l'ensemble $\{1,2,3\}$
- $\{2n+1\,;\, n \in \{1,2,3\}\}$: ensemble obtenu en partant de $\{1,2,3\}$ et en appliquant la fonction $n \mapsto 2n+1$, c'est-à-dire $\{3,5,7\}$

$\in$	appartient $1 \in \{1,2,3\}$	$\notin$	n'appartient pas $4 \notin \{1,2,3\}$		
$\subset$	inclus $\{2,3\} \subset \{1,2,3\}$	$\not\subset$	non inlus $\{2,4\} \not\subset \{1,2,3\}$	$\emptyset$	ensemble vide
$\cup$	union $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\}$	$\cap$	intersection $\{2,3\} \cap \{1,2\} = \{2\}$	$\boldsymbol{-}$	différence $\{1,2,3\} \boldsymbol{-} \{2,3\} = \{1\}$

1.2. Nombres. —

- $\mathbf{N} = \{0,1,2,\ldots\}$: ensemble des nombres entiers naturels
  $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \boldsymbol{-} \{0\} = \{1,2,\ldots\}$
- $\mathbf{Z} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$: ensemble des nombres entiers relatifs
- $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}^*\}$: ensemble des nombres rationnels
- $\mathbf{R}$: ensemble des nombres réels
- $\lfloor x \rfloor$: partie entière de x
- $|x|$: valeur absolue de x
- $[\![-2,3]\!]$: ensemble des nombres entiers entre -2 et 3
- $[\sqrt{2},\pi[$: ensemble des nombres réels entre $\sqrt{2}$ (inclus) et π (exclu)
- $\{x \in \mathbf{R} \,\big|\, |x-a| < \varepsilon\} =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$

1.3. Polynômes. —

- $x^2 - 1$: polynôme en x, à coefficients entiers, de degré 2.
- $y^3 - \pi y + \sqrt{2}$: polynôme en y, à coefficients réels, de degré 3.
- racine de P : nombre a tel que $P(a) = 0$
- "a racine de P" est équivalent à "il existe Q de degré $\deg(P) - 1$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$"

Division euclidienne. A, B deux polynômes.
Il existe Q (quotient) et R (reste) avec $\deg(R) < \deg(B)$ tels que

$$A = BQ + R.$$

Si $R = 0$, B *divise* A.
Exemple (exécution de l'algorithme de division euclidienne des polynômes)

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x \quad -1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2 \ +2x \ +2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^2 & & -1 & \\
 & -2x^2 & +2x & & \\ \cline{2-3}
 & & 2x & -1 & \\
 & & -2x & +2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 2x + 2$ quotient, $R(x) = +1$ reste

1.4. Nombres complexes. —

— *nombre complexe* : tout nombre de la forme $z = a + \mathrm{i}b$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.
    $\mathrm{Re}(z) = a$: *partie réelle* de z
    $\mathrm{Im}(z) = b$: *partie imaginaire* de z
    $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: *module de* z
    $\arg(z) = \theta$ tel que $\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$: *argument de* z
    $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$: *décomposition polaire* de z
    $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$: *conjugué* de z

— $\mathbf{C}$: ensembles des nombres complexes.

— *addition :* $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$,

— *multiplication :* $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(bc + ad)$.

— $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\big(\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)\big)$: exponentielle complexe

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} .$$

Exemples

nombre	module	argument	décomposition polaire	conjugué
i	1	$\pi/2$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$	$-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\pi/4$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$	$1-\mathrm{i}$
$-1+\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/4}$	$-1-\mathrm{i}$
$1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	2	$\pi/3$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$	$1-\mathrm{i}\sqrt{3}$
$\sqrt{3}+\mathrm{i}$	2	$\pi/6$	$2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$	$\sqrt{3}-\mathrm{i}$

Formule de Moivre.

$$(\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$$

Formules d'Euler.

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\ , \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2i}\ .$$

1.5. Équations polynomiales complexes. —

Équation de degré 2 :

$a, b, c \in \mathbf{C}, a \neq 0$, $\delta :=$ racine carrée complexe de b^2-4ac (discriminant).
Alors az^2+bz+c a pour racines

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\ .$$

Calcul des racines carrées : $z = a+ib$: nombre complexe.
Pour trouver $\delta = x+\mathrm{i}y$ tel que $\delta^2 = z$ on résoud

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

On obtient l'égalité

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}, \qquad y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2},$$

signe de xy = signe de b

Racines n-ièmes complexes

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k\pi/n)}$, avec $k = 0, \dots, n-1$: *racines n-ièmes de l'unité*
Pour $z_0 = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, l'équation $z^n = z_0$ admet pour solutions

$$\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/n},\ \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2\pi)/n},\ \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+4\pi)/n}, \dots,\ \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2(n-1)\pi)/n}$$

Exercices

Ensembles, nombres entiers, rationnels et réels

Exercice 1.1. (*)

Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $\{1,2,3\} \cup \{4,5,6\}$,
2. $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\}$,
3. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,4\}$,
4. $\{1,2,3\} \cap \{4,5,6\}$,
5. $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}$,
6. $(\{1,2\} \cup \{1,3\}) \cap \{3,4\}$,
7. $(\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{5,6\}$,
8. $(\{1,2\} \cup \{3,4\}) \cap \{2,4\}$,
9. $(\{1,\{2\}\} \cup \{2,3\}) \cap \{\{2\},\{3\}\}$,
10. $(\{1,\{2\}\} \cap \{\{2\},\{3\}\}) \cap \{\{2\},3\}$,
11. l'ensemble des nombres entiers compris entre $\sqrt{2}$ et 2π.

Exercice 1.2. (*)

On note A l'ensemble $\{1,2,3\}$ et B l'ensemble $\{-1,0,1\}$. Écrire en extension (c'est-à-dire en donnant tous leurs éléments) les ensembles suivants :

1. $A \cap B$,
2. $A \cup B$,
3. $A - B$,
4. $B - A$,
5. $\{x+2; x \in A\}$,
6. $\{2x; x \in B\}$,
7. $\{\frac{1}{x}; x \in A\}$,
8. $\{x+y; x \in A, y \in B\}$,
9. $\{x+y; x \in A, y \in A\}$,
10. $\{x+x; x \in A\}$,
11. $\{xy; x \in A, y \in B\}$,
12. $\{x \in A \,|\, x \geq 2\}$,
13. $\{x \in B \,|\, x \geq 2\}$,
14. $\{y \in A \,|\, y \leq 5\}$,
15. $\{z \in A \cup B \,|\, z \geq 0\}$,

Exercice 1.3. (*/**)

Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants.

1. $[0,1] \cup [1,2]$,
2. $[0,1] \cap [1,2]$,
3. $[0,1] \cap \mathbf{Z}$,
4. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\}$,
5. $\{2n+1; n \in [\![2,5]\!]\}$,
6. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\} \cup \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
7. $\{3n+2; n \in \{1,2,3\}\} \cap \{4n+3; n \in \{1,2,3,4\}\}$,
8. $\{2n+1; n \in \mathbf{Z}\} \cup \{2n; n \in \mathbf{Z}\}$,
9. $\{2n+1; n \in \mathbf{Z}\} \cap \{2n; n \in \mathbf{Z}\}$,
10. $\left\{\dfrac{p}{q}; p \in \{1,2,3,4\}, q \in \{1,2,3,4\}\right\}$,

11. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{Z}}\{n\}$,
12. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}[n, n+1[$,
13. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, \lfloor x \rfloor = 3\}$,
14. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, 2 \leq \lfloor x \rfloor \leq 6\}$,
15. $\{x \in \mathbf{Q} \,|\, |x| \leq 3\}$,
16. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| = \lfloor x \rfloor\}$.

Exercice 1.4. (*)
Écrire les ensembles suivants comme intervalles ou réunions d'intervalles :

1. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, 2 \leq x < 6\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < 0,5\}$,
3. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x-2| < 0,1\}$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x-5| \leq 0,01\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x-0,1| < 0,2\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 < 3\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^4 \geq 1\}$,
8. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - x \geq 0\}$.

Exercice 1.5. (*/)**
Représenter les sous-ensembles de $\mathbf{R}$ suivants

1. $[0, 1[$,
2. $[0, 1[\cup]2, 3]$,
3. $[0, 2]\cap]1, 3[$,
4. $[0, 2] \cap \mathbf{Z}$,
5. $[0, 2] \cup \{3, 4\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, 2 < x \leq 4\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < 1\}$,
8. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x-3| < \frac{1}{2}\}$,
9. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x-1,5| > 0,5\}$,
10. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 \leq 0\}$,
11. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x(x-2) \leq 3\}$,
12. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, \sin(x) > 0\}$,
13. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}}\left[n, n+\frac{1}{2}\right]$,

Exercice 1.6. (*)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Pourquoi ?

— Le produit de 3 nombres réels est négatif si et seulement si l'un d'entre eux est négatif, les deux autres étant positifs.

— Le produit de n nombres réels est positif si et seulement si un nombre pair d'entre eux sont négatifs, les autres étant positifs.

Exercice 1.7. (**)
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont inclus dans lesquels ?

1. $[0,1]$,
2. $]-1,1[$,
3. $[0,\frac{1}{2}]$,
4. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 - x = 0\}$,
5. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x| < \dfrac{1}{5}\}$,
6. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, |x - 0,2| < 0,1\}$,
7. $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0\}$.

Exercice 1.8. (**)
Les ensembles suivants coïncident-ils ?

1. $\{1,1,2\}$ et $\{2,1\}$;
2. $\{1,(1,2)\}$ et $\{(1,1)\}$;
3. $\{(1,1),(1,2)\}$ et $\{(1,1),(2,1)\}$;
4. $\{\{1\},\{1,2\}\}$ et $\{\{1\},\{2,1\}\}$;
5. $\{0,1,2,3\}$ et $\{x \in \mathbf{Z} \,|\, x \leqslant 3\}$;
6. $\{0,1,2,3\}$ et $\{x \in \mathbf{N} \,|\, x \leqslant 3\}$;
7. $[\![1,3]\!] \times [\![0,3]\!]$ et $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \,|\, 1 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 3\}$;
8. $\{(x,y) \in \mathbf{N}^2 \,|\, 0 \leqslant x < y \leqslant 3\}$ et $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,3)\}$.

Exercice 1.9. (**) Écrire le plus simplement possible les ensembles suivants (Justifier rigoureusement, en montrant séparément deux inclusions).

1. $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbf{R}} \{x^2\}$,
2. $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$,
3. $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$,
4. $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]} [x-1, x+1]$,
5. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$,
6. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

Exercice 1.10. (**)
Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

1. Simplifier l'expression $(A \cap B \cap C) \cup ({}^cA \cap B \cap C) \cup {}^cB \cup {}^cC$.
2. Démontrer que $(A \cap {}^cB) \cap {}^cC = A \cap {}^c(B \cup C) = (A \cap {}^cC) \cap {}^cB$.
3. A-t-on toujours $(A \cup B) \cap ({}^cA \cup {}^cC) \cap {}^cB \cap ({}^cA \cup B \cup C) = \emptyset$?

Remarque informatique : Étant donné des sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un ensemble E et un ensemble F formé à partir de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ à l'aide des opérations $\cup, \cap$, et $^{\complement}$, répondre à la question « F est-il toujours vide ? » est un exemple de problème très difficile à résoudre en pratique : le temps nécessaire à un ordinateur pour y répondre est en général exponentiel en n (c'est-à-dire de l'ordre de 2^n). Trouver un algorithme qui réponde à cette question en temps polynomial (c'est-à-dire de l'ordre de n^5 ou n^{18}) est le problème le plus important de l'informatique théorique aujourd'hui. On l'appelle $P \stackrel{?}{=} NP$.

Nombres complexes et polynômes

Exercice 1.11. (*)
Mettre sous forme algébrique (c'est à dire $x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels) les nombres complexes suivants (a et b sont des réels).

1. $1 - 2\mathrm{i} - (-4 + 7\mathrm{i})$,
2. $\overline{1 + 2\mathrm{i}} + \overline{-4 + 6\mathrm{i}}$,
3. $(1 + 2\mathrm{i})\,(-4 + 6\mathrm{i})$,
4. $(2 - 3\mathrm{i})\,(-3 + 2\mathrm{i})$,
5. $(a + \mathrm{i}b)^2$,
6. $(a - \mathrm{i}b)^2$,
7. i^{50},
8. $\overline{\left(\dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{-4 + 6\mathrm{i}}\right)}$,
9. $\dfrac{3 + 6\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}}$,
10. $\dfrac{5 + 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$,
11. $\dfrac{(5 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{(1 - 2\mathrm{i}) - (\mathrm{i} - 1)}$,
12. $\dfrac{-2}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}$,
13. $\left(\dfrac{1 + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}\right)^2 + \dfrac{3 + 6\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}}$,
14. $\dfrac{2 + 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} + \dfrac{2 - 5\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$,
15. $\left(\dfrac{1 + \mathrm{i} - \sqrt{3}(1 - \mathrm{i})}{1 + \mathrm{i}}\right)^2$.

Exercice 1.12. (*) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$:

1. $z(\mathrm{i} - 3) = 2$,
2. $3\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}z = 4 - \mathrm{i}$,
3. $3\mathrm{i}z + 2z = 6\mathrm{i}$,
4. $\dfrac{2z + \mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}z} = 2 + 3\mathrm{i}$,
5. $(1 - \mathrm{i})z + \bar{z} = 4 - 3\mathrm{i}$,
6. $\dfrac{\overline{2z + \mathrm{i}}}{1 - \bar{z}} = 2 + \mathrm{i}$.

Exercice 1.13. (*)
Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants.

1. $1 + \mathrm{i}$,
2. $3 + 3\mathrm{i}$,
3. $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$,
4. $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$,
5. $\sqrt{3} + \mathrm{i}$,
6. $-\dfrac{4}{3}\mathrm{i}$,
7. $1 + \mathrm{i}(1 + \sqrt{2})$,
8. $(1 + \sqrt{2}) - \mathrm{i}$,
9. $\dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$,

10. $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^3$,
11. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^4$,
12. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^5+(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^5$,
13. $\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$,
14. $\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2-2\mathrm{i}}$.

Exercice 1.14. (*)

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. tout nombre réel a pour argument 0.
2. tout nombre réel strictement négatif a pour argument π.
3. tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument $\pi/2$ ou $3\pi/2$.
4. le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
5. si deux nombres complexes ont le même argument alors leur produit est réel.
6. le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
7. si deux nombres complexes non nuls ont le même argument alors leur quotient est réel.
8. si deux nombres complexes non nuls ont le même module alors leur quotient a pour module 1.

Exercice 1.15. (*)

Soit z un nombre complexe non nul. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1. le module de z est égal au module de son conjugué.
2. l'argument de z est l'opposé de l'argument de son conjugué.
3. le produit de z par une racine n-ième de l'unité a le même module que z.
4. l'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z.
5. si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π.
6. l'argument de z^2 est le double de l'argument de z.
7. l'argument de $z/\overline{z}$ est égal à l'argument de z^2.

Exercice 1.16. (**)

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants (θ est un paramètre réel).

1. $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$,
2. $1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)$,
3. $e^{e^{i\theta}}$.

Exercice 1.17. (**)
Calculer les racines carrées, sous forme algébrique, des nombres suivants

1. -1,
2. i,
3. $1 + i$,
4. $-1 - i$,
5. $1 + i\sqrt{3}$,
6. $3 + 4i$,
7. $8 - 6i$,
8. $7 + 24i$,
9. $3 - 4i$,
10. $24 - 10i$.

Exercice 1.18. (**)

1. Calculer les racines carrées de $(1+i)/\sqrt{2}$ sous forme algébrique.
   En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$, exprimées à l'aide des quatre opérations standards et du signe $\sqrt{\ }$.
2. Calculer les racines carrées de $(\sqrt{3}+i)/2$ sous forme algébrique.
   En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 1.19. (**)
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, en donnant les solutions sous forme algébrique

1. $z^2 + z + 1 = 0$,
2. $z^2 - z + 1 = 0$,
3. $z^2 + 2z + 4 = 0$,
4. $z^2 + 4z + 5 = 0$,
5. $4z^2 - 2z + 1 = 0$,
6. $z^2 + (1+2i)z + i - 1 = 0$,
7. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$,
8. $z^2 - (1-i)z - i = 0$,
9. $z^2 - (11-5i)z + 24 - 27i = 0$.

Exercice 1.20. (**)
Soit $z \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$. Trouver deux nombres réels p, q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Exercice 1.21. (**)
Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes, en donnant les solutions sous la forme que vous voulez

1. $z^3 = i$
2. $z^3 = \dfrac{-1+i}{4}$,
3. $z^3 = 2 - 2i$,
4. $z^4 = 1$,
5. $z^4 = (-1 + i\sqrt{3})/2$,

6. $\left(\dfrac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$

Exercice 1.22. (**)

Calculer le quotient et le reste de la division de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x - 1$,
2. $A(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$,
3. $A(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ et $B(x) = x + 1$,
4. $A(x) = x^5 - 2x^3 - x^2 + x$ et $B(x) = x^2 - 1$.

Exercice 1.23. (**)

Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

1. $z^3 - 5z^2 + 6z = 0$,
2. $z^3 - 2z + 1 = 0$,
3. $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$,
4. $z^3 - 2z + 4 = 0$.

Exercice 1.24. (**)

Montrer les égalités suivantes, en utilisant la formule de Moivre

1. $\cos(4x) = 8\cos(x)^4 - 8\cos(x)^2 + 1$,
2. $\sin(4x) = 8\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)$.

Exercice 1.25. (**)

Linéariser les expressions suivantes (c'est-à-dire les écrire comme sommes d'expressions de type $a\cos(kx)$ et $b\sin(kx)$, avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$).

1. $\cos(x)^3$,
2. $\sin(x)^3$,
3. $\cos(x)^4$,
4. $\sin(x)^4$,
5. $\cos(x)^2\sin(x)^2$,
6. $\cos(x)\sin(x)^3$,
7. $\cos(x)^3\sin(x)$,
8. $\cos(x)^3\sin(x)^2$,
9. $\cos(x)^2\sin(x)^3$,
10. $\cos(x)\sin(x)^4$.

Exercice 1.26. (***)

On note $\mathscr{G} = \{m^2 + n^2\,;\,(m,n) \in \mathbf{Z}^2\}$.

1. Donner un exemple d'entier naturel qui est dans $\mathscr{G}$ et un exemple d'entier naturel qui n'est pas dans $\mathscr{G}$.
2. En utilisant la formule $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$ pour $z, z' \in \mathbf{C}$, montrer que $\mathscr{G}$ est stable par produit, c'est-à-dire que si $p, q \in \mathscr{G}$, alors $pq \in \mathscr{G}$.
3. En déduire que 221 est dans $\mathscr{G}$.