Sujet A

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définir par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire le rang de f.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2 Soit $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n+1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

Exercice 3 Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On considère l'application définie dans l'espace des fonctions de classe C^1 à valeurs dans l'espace des fonctions continues et donnée par

$$f(y) = y' + y$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les fonctions y de classe C^1 telles que $y' + y = 0$, et en déduire une base du noyau de f.

Sujet B

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Démontrer les assertions suivantes :
1) u est injective si et seulement si $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est libre.
2) u est surjective si et seulement si $\{u(e_1), \ldots, u(e_n)\}$ est génératrice.

Exercice 1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y)$. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

1. Déterminer un vecteur $a\mathbb{R}^3$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Calculer $f(b)$ et $f(c)$, et en déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 2 Pour une matrice carrée réelle $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit l'application trace par $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (la somme des coefficients diagonaux).

1. Posons
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculer $Tr(a)$, $Tr(B)$ et $Tr(A+B)$.
2. Montrer que l'application trace est linéaire.

Exercice 3 Soit $\phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\phi(f) = f'' - 3f' + 2f$. Montrer que ϕ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Sujet C

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique par f. En déduire le rang de f.
2. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et en donner une base.

Exercice 2 Soit f un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire une application linéaire telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\mathrm{Ker}(u)$.
2. Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

Sujet A

Question de cours : Quelle est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$? Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.
2. Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
4. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
5. La somme de deux matrices diagonalisables est aussi diagonalisable.
6. La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Justifier la convergence et déterminer la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{p_n}$ où p_n est le n-ème nombre premier.

Indication : Considérer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\right) = \sum_{n-1}^{N} \ln(1 + p_n + p_n^2 + \dots)$.

Exercice 4 On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f & : & R_{2n}[X] & \to & R_{2n}[X] \\ & & P & \mapsto & (X^2-1)P' - 2nXP \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.
3. f est-il diagonalisable ?

Sujet B

Question de cours : Donner trois caractérisations équivalentes du fait qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Exercice 1 Déterminer, selon la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$, la nature et la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}}$.

Exercice 2 La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que AB est inversible si et seulement si A et B sont toutes deux inversibles.
2. Soit ξ_A le polynôme caractéristique de A. Démontrer que $\xi_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont pas de valeurs propres en commun.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. Étudier en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $\dfrac{u_n}{(S_n)^a}$.

Sujet C

Question de cours : Donner la définition d'une boule ouverte et fermée, et montrer qu'une boule fermée n'est pas ouverte.

Exercice 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Calculer la somme de la série suivante après avoir vérifié sa convergence :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}$$

Exercice 3 Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 3. Pour $P \in E$, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B, où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de E, puis déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   Indication : Calculer $AP - BP$ pour $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et en déduire une forme générique de f.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propresde f.

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.