Sujet 1

Exercice 1 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelle est la nature géométrique de f ?

Correction : Premièrement, on peut vérifier que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ puisque :

— Les vecteurs colonne de f, que l'on note C_1,C_2 et C_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$ puisque le déterminant de A vaut 1.

— Cette base est orthogonale :

$$\langle C_1, C_2\rangle = \frac{1}{3}\left(2\times(-1)+2\times 2+(-1)\times 2\right) = 0,\ \langle C_2, C_3\rangle = \frac{1}{3}\left((-1)\times 2+2\times(-1)+2\times 2\right) = 0,$$

$$\langle C_1, C_3\rangle = \frac{1}{3}\left(2\times 2+2\times(-1)+(-1)\times 2\right) = 0.$$

— Elle est de plus orthonormée, puisque par exemple

$$||C_1||^2 = \langle C_1, C_1\rangle = \frac{1}{3}\left(2^2+2^2+(-1)^2\right) = 1.$$

Comme $\det(A) = 1$, on sait de plus par classification des endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ que c'est une rotation. Déterminons son axe : il suffit de déterminer les points de $\mathbb{R}^3$ fixes par f, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $AX = X$. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+2z &=& 3x \\ 2x+2y-z &=& 3y \\ -x+2y+2z &=& 3z \end{array}\right.$$

La résolution donne alors $x = y = z$, de sorte que l'ensemble des points fixes de f est la droite engendrée par le vecteur $u = (1,1,1)$.

Il reste à déterminer l'angle θ de cette rotation : on sait quand dans une base orthonormée adaptée la matrice d'une telle rotation s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

d'où $2 = \mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$, et on obtient alors $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

Pour en déterminer le signe, on peut remarquer que en considérant $v = (1,-1,0)$, qui est orthogonal à u, la base $(u, v, f(v))$ est directe, ce qui signifie que $\theta \in]0,\pi[$ modulo 2π. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ et f est une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(1,1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2 Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^t B).$$

1. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On notera N la norme associée.
2. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Correction :

1. On vérifie que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire, et symétrique puisque $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA) \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons qu'elle est définie positive : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^t A$. Alors pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Tr}(A^tA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 \geq 0,$$

et on a l'égalité si et seulement si $a_{k,i} = 0$ pour tous $1 \leq i,k \leq n$, autrement dit si et seulement si $A = 0$. Donc la forme est définie positive et c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Considérons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, et écrivons $AB = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}.$$

On a alors

$$N(AB)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2.$$

Si on applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ (pour la somme sur k). On en déduit que

$$\begin{aligned}
N(AB)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}^2\right)\\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}^2\right)\\
&\leq N(A)^2N(B)^2
\end{aligned}$$

Sujet 2

<u>Exercice 1</u> Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et A, B deux fermés dans E. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à un sous-espace fermé F de E est définie par

$$d(x,F) := \inf_{y\in F}\{d(x,y)\}$$

1. Montrer que $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \forall x \in E, d(x,A) + d(x,B) > 0$.

2. On suppose que $A \cap B = \varnothing$, montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$.

3. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Correction :

1. Supposons tout d'abord que $A \cap B = \varnothing$ et considérons $x \in E$. On sait qu'on a $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in A$. Mais si $x \in A$ alors par hypothèse $x \notin B$, et donc $d(x,B) > 0$ et finalement $d(x,A) + d(x,B)$. De même, par symétrie on on obtient que c'est vérifié si $x \in B$. Si $x \notin A \cup B$, alors les deux distances $d(x,A)$ et $d(x,B)$ sont strictement positives, d'où le résultat.
Réciproquement, supposons que $\forall x \in E$, $d(x,A) + d(x,B) > 0$ et supposons que $A \cap B \neq \varnothing$. Considérons alors $x \in A \cap B$. On a donc $d(x,A) = d(x,B) = 0$, donc $d(x,A) + d(x,B) = 0$: contradiction.

2. Considérons la fonction $f : E \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Alors d'après **1.**, f est bien définie puisque le dénominateur ne s'annule jamais, et f est continue en tant que quotient de deux fonctions continues. Par ailleurs, si $x \in A$, alors $d(x,A) = 0$ et donc $f(x) = 0$ et si $x \in B$, alors $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)} = 1$, d'où les conditions requises.

3. On sait que f prend la valeur 0 sur A et 1 sur B : séparons donc $\mathbb{R}$ en deux intervalles disjoints, l'un contenant 0 et l'autre contenant 1 : par exemple $I_1 =]-\infty, 1/4[$ et $I_2 =]3/4, +\infty[$. Posons $U = f^{-1}(I_1)$ et $V = f^{-1}(I_2)$, alors par construction on a $A \subset U$ et $V \subset V$. De plus, puisque $I_1 \cap I_2)\varnothing$, alors $U \cap V = \varnothing$. Par ailleurs, U et V sont ouverts en tant qu'images réciproques d'ouverts par l'application continue f.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1. Montrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.
2. Montrer alors que f est linéaire.
Correction :
1. Fixons une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Alors par hypothèse pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 0 \text{ si } i \neq j$$

donc la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E.
2. Soit $x \in E$, sa décomposition dans la base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

D'où $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i)$ et donc

$$\langle f(x), f(e_i)\rangle = \langle x, e_i\rangle.$$

De plus, comme on a montré que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale, on a aussi

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i).$$

Donc on vient de montrer que si x s'écrit $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$, ce qui suffit à prouver que f est linéaire. En effet, si on prend un autre élément $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire, alors

$$f(x) + \lambda f(y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) f(e_i) \text{ et}$$

$$f(x + \lambda y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) f(e_i).$$

Sujet 3

Exercice 1 Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \leq 1$, on note D_n l'ensemble

$$D_n := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}\right\}.$$

1. Quelle est la nature de l'ensemble D_n ?
2. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $D_{n+1} \subset D_n$.
3. Soit $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que D soit fermé.
Correction :
1. On remarque que D_n correspond à l'ensemble de définition d'un disque dans $\mathbb{R}^2$, de centre $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ et de rayon $r_n = \frac{\lambda}{n}$.

2. Comment vérifier qu'un disque est inclus dans un autre ? Par exemple sur un dessin, on voit que $D(x, r_1) \subseteq D(y, r_2)$ si et seulement si $xy + r_1 \leq r_2$. Dans ce cas, on en déduit donc que $D_{n+1} \subset D_n$ si et seulement si

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} \leq \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n+1},$$

donc si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

3. On vient de montrer que si $\lambda \geq \sqrt{2}$, alors $D_{n+1} \subset D_n \subset \cdots \subset D_2 \subset D_1$. Donc $D = D_1$ est le disque de centre $(1, 1)$ et de rayon λ est fermé. Sinon, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(0, 0) \notin D_n$ mais cependant la suite des centres $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ des D_n est contenue dans D, et converge vers $(0, 0)$ qui lui n'est pas dans D, donc D n'est pas fermé dans ce cas.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel euclidien, et a un élément non nul de E. On pose

$$s_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}a.$$

1. Montrer que $a \in \mathcal{O}(E)$.
2. Calculer $\mathrm{Ker}(s_a - \mathrm{id})$, $\mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{id})$ et en déduire la nature géométrique de s_a.

Correction :

1. Considérons le sous-espace F de E défini par $F = \mathrm{Vect}(a)$, et posons $G := F^\perp$. On sait alors qu'on a $E = F \oplus G$ et donc un vecteur x de E se décompose sous la forme $\lambda a + g$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g \in G$, c'est à dire $\langle a, g\rangle = 0$. D'où

$$s_a(x) = s_a(\lambda a + g) = \lambda a + g - 2\frac{\langle a, \lambda a + g\rangle}{\langle a, a\rangle}a = \lambda a + g - 2\frac{\langle a, \lambda a\rangle}{\langle a, a\rangle} = \lambda a + g - 2\lambda a = g - \lambda a.$$

De plus, par Pythagore puisque a et g sont orthogonaux, on a alors

$$||x||^2 = ||\lambda a + g||^2 = \lambda^2||a||^2 + ||g||^2 = ||g - \lambda a||^2 = ||s_a(x)||^2,$$

d'où $s_a \in \mathcal{O}(E)$.

2. Par définition, $\mathrm{Ker}(s_a - \mathrm{id}) = \{x \in E\ ;\ s_a(x) = x\}$. Or, d'après ce que précède, $s_a(\lambda a + g) = g - \lambda a)$ donc on a l'égalité $s_a(x) = x$ si et seulement si $\lambda = 0$, et donc $x = g \in G$. D'où $\mathrm{Ker}(s_a - \mathrm{id}) = F$. De même, $\mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{id}) = \{x \in E\ ;\ s_a(x) = -x\}$, donc en écrivant x sous la forme $\lambda a + g$, on doit avoir $s_a(\lambda a + g) = -\lambda a - g$. D'après les calculs suivants, c'est vrai si et seulement si $g = 0$, autrement dit $x \in F = \mathrm{Vect}(a)$. D'où $\mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{id}) = F$. On vient donc finalement de montrer que

$$\mathrm{Ker}(s_a - \mathrm{id}) \oplus^\perp \mathrm{Ker}(s_a + \mathrm{id}) = E,$$

d'où on en déduit que s_a est la symétrie orthogonale par rapport à G (l'ensemble de ses points fixes, i.e $\mathrm{Ker}(s_a - \mathrm{id})$.

Sujet 4

Exercice 1 Soit N l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$N(x, y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-elle équivalente à la norme euclidienne définie par $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Correction :

1. Montrons que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Si $N(x,y)=0$, alors $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|x+ty|=0$ et donc $x+ty=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Pour $t=0$, on obtient alors que $x=0$, d'où on en déduit (par ex en prenant $t=1$) que $y=0$.
Si $\lambda\in\mathbb{R}$, on a
$$N(\lambda x,\lambda y)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|\lambda x+\lambda ty|}{\sqrt{1+t^2}}=\lambda\sup_{t\in\mathbb{R}}\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}=|\lambda|N(x,y).$$
Soient (x,y) et $(x',y')\in\mathbb{R}^2$, alors par inégalité triangulaire on a :
$$|(x+x')+t(y+y')|\leq|x+ty|+|x'+ty'|,$$
d'où on déduit
$$\frac{|(x+x')+t(y+y')|}{\sqrt{1+t^2}}|\leq\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{x'+ty'}{\sqrt{1+t^2}}\leq N(x,y)+N(x',y').$$
En prenant le sup, qui est le plus petit des majorants, on obtient alors
$$N((x,x')+(y,y'))\leq N(x,y)+N(x',y').$$

2. On a $|x+ty|=|\langle(x,y),(1,t)\rangle|_2$ (où $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ est le produit scalaire usuel associé à la norme euclidienne N_2 de $\mathbb{R}^2$) donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a
$$|x+ty|\leq N_2(x,y)N_2(1,t)=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+t^2},$$
d'où
$$\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}\leq N_2(x,y)$$
En passant au sup, on obtient donc l'inégalité $N(x,y)\leq N_2(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
En fait, on peut montrer qu'on a aussi l'inégalité dans l'autre sens en étudiant la fonction $t\mapsto\left(\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2=\frac{(x+ty)^2}{1+t^2}$.
Le calcul de sa dérivée donne
$$f'(t)=\frac{2(x+ty)(y-tx)}{(1+t^2)^2}.$$
Si $x\neq 0$, alors $f'(\frac{y}{x})=0$ et on vérifie que f admet un maximum relatif en $t=y/x$ (pour cela il faut faire une étude complète de la fonction en distinguant 4 cas différents selon les signes de x et y). Ce maximul relatif est en fait aussi un maximum de la fonction $t\mapsto\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$ (puisque la valeur en ce point est positive) et on a :
$$\frac{|x+\frac{y}{x}y|}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=\frac{\left|\frac{x^2+y^2}{x}\right|}{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{|x^2+y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}=N_2(x,y).$$
Autrement dit, $N_2(x,y)$ est une des valeurs atteintes par la fonction $t\mapsto\frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$ (et c'en est même le maximum), et donc en passant au sup on obtient alors $N(x,y)\geq N_2(x,y)$. Si $x=0$, alors on étudie la fonction $t\mapsto\frac{|ty|}{\sqrt{1+t^2}}$ et on remarque que cette fonction est positive et sa limite en $+\infty$ vaut $|y|=N_2(x,y)$ donc $N(x,y)\leq N_2(x,y)$ aussi dans ce cas par un raisonnement similaire (en passant au sup).
Donc en fait on vient de montrer que $N=N_2$!

<u>**Exercice 2**</u> Soit E un espace vectoriel euclidien, soit $u\in\mathcal{O}(E)$ un endomorphisme orthogonal, et soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $u(F^\perp)=(u(F))^\perp$.

2. Montrer que F est stable par u (c'est à dire $u(F)\subset F$) si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Correction :

1. Soit $x \in E$, puisque u est un endomorphisme de E inversible, il existe un unique $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On a alors :

$$\begin{aligned} x \in u(F^\perp) &\Leftrightarrow y \in F^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall z \in F, \langle y, z \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall z \in F, \langle u(y), u(z) \rangle = \langle x, u(z) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (u(F))^\perp \end{aligned}$$

2. Supposons que F est stable par u, alors $u(F) \subseteq F$ mais comme u est un automorphisme, on a $u(F) = F$. On a alors
$$u(F^\perp) = (u(F))^\perp = F^\perp$$
et donc $F^\perp$ est stable par u. Réciproquement, si $F^\perp$ est stable par u alors de même $u(F^\perp) = F^\perp$ et donc
$$F = F^{\perp\perp} = u(F^\perp)^\perp = u(F^{\perp\perp}) = u(F).$$

Sujet 5

Exercice 1 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la nature géométrique de f ?

Correction : On remarque que la matrice A est orthogonale : en effet, si on note (C_1, C_2, C_3) ses 3 vecteurs colonnes, alors on a

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{9}\left[(-8) \times 4 + 4 \times 7 + 1 \times 4\right] = 0,\ \langle C_1, C_3 \rangle = \frac{1}{9}\left[1 \times (-4) + 8 \times 4 + (-4) \times 7\right] = 0, \text{etc.}$$

et

$$||C_1||^2 = \frac{1}{81}\left[1^2 + 8^2 + (-4)^2\right] = 1, \text{etc.}$$

Donc $f \in \mathcal{O}(E)$ et on remarque que la matrice A est symétrique, donc c'est la matrice d'une symétrie orthogonale. Pour déterminer cette symétrie, il suffit alors de déterminer son ensemble de points fixes : pour cela, on résout le système $AX = X$ pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -8x + 4y + z & = & 9x \\ 4x + 7y + 4z & = & 9y \\ x + 4y - 8z & = & 9z \end{array} \right.$$

et la résolution nous donne $x = z$ et $y = 4x$, soit l'ensemble des points fixes est $\mathrm{Vect}(1, 4, 1)$. Par conséquent, f est une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(1, 4, 1)$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel normé, et A une partie non vide et bornée de E. On définit le diamètre de A comme la quantité

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{||y - x||, x, y \in A\}.$$

1. Montrer que $\overline{A}$ et $\partial(A) := \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$ sont également bornés.
2. Supposons que $A \neq \varnothing$, comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\overset{\circ}{A})$ et $\mathrm{diam}(\overline{A})$.

Correction :

1. A est une partie bornée de E donc il existe une certaine boule $B(0, M)$ pour $M > 0$ qui contient A. Soit $x \in \overline{A}$, alors par définition il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x, et par passage à la limite :
$$||x_n|| \leq M \Rightarrow ||x|| \leq M.$$
Donc $\overline{A}$ est bornée, et $\partial(A)$ aussi puisque $\partial(A) \subset \overline{A}$.
2. Supposons que A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$. Alors on a $\sup\{||y - x||, x, y \in A\} \leq \sup\{||y - x||, x, y \in B\}$ et donc $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$. Ici, comme on a les inclusions $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$, on en déduit que
$$\text{diam}(\overset{\circ}{A}) \leq \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\overline{A})$$
Montrons que la deuxième inégalité est en fait une égalité. En effet, par définition de la borne supérieure, pour un $\varepsilon > 0$ il existe $x, y \in \overline{A}$ tels que
$$||x - y|| \geq \text{diam}(\overline{A}) - \frac{\varepsilon}{3},$$
mais par définition de $\overline{A}$ il existe des éléments x' et y' de A tels que
$$||x - x'|| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } ||y - y'|| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
et alors
$$||x - y|| = ||(x - x') + (x' - y') + (y' - y)|| \leq ||x - x'|| + ||x' - y'|| + ||y - y'||$$
d'où
$$||x' - y'|| \geq ||x - y|| - ||x' - x|| - ||y' - y|| \geq \text{diam}(\overline{A}) - \varepsilon.$$
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$.
En revanche, la première inégalité n'est pas forcément une inégalité : en effet prenons par exemple $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1] \cup -3$, alors $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$ a pour diamètre 1, tandis que A a pour diamètre 4 (la distance entre -3 et 1).

Sujet 6

Exercice 1 Soit $a \geq 0$. On définit l'application $N_a : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par
$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soient $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Montrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Montrer que si $(a, b) \in [0, 1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction :
1. Le fait que $N_a(\lambda P) = \lambda N_a(P)$ et $N_a(P + Q) \leq N_a(P) + N_a(Q)$ est clair par propriété et inégalité triangulaire de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est tel que $N_a(P) = 0$, alors $P = 0$.
Supposons que $N_a(P) = 0$. Alors $|P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t = 0$. Comme ces deux quantités sont positives (par positivité de l'intégrale), on en déduit que $|P(a)| = 0|$ et $\int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t = 0$. Mais la fonction $t \mapsto |P'(t)|$ est continue et positive, et donc $t \mapsto |P'(t)|$ est la fonction nulle puisque l'intégrale d'une fonction continue positive sur $[0, 1]$ est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. Par conséquent, P est un polynôme constant, en particulier égal à $P(a) = 0$, donc $P = 0$.

2. Soient $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$, supposons que N_a et N_b sont équivalentes, alors il existe c_1, $c_2 > 0$ constantes telles que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait

$$c_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq c_2 N_a(P).$$

Pour $P = X^n$, avec $n > 0$, on a alors

$$N_a(P) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1} \mathrm{d}t = a^n + 1 \text{ et de même } N_b(P) = b^n + 1$$

Donc on en déduit que pour tout $n \geq 0$, on a

$$b^n + 1 \leq c_2(a^n + 1) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{b^n} \leq c_2 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{c_2}{b^n}.$$

Puisque $b > 1$, $b^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc le terme de gauche tend vers 1, or puisque $\frac{a}{b} < 1$, le terme de droite tend vers 0, et en passant à la limite on obtient alors que $1 \leq 0$: contradiction.

3. Supposons que $(a, b) \in [0, 1]^2$, et supposons sans perte de généralité que $a \leq b$. On sait alors d'après le théorème fondamental de l'intégration que

$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t) \mathrm{d}t \leq \int_a^b |P'(t)[\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t,$$

et donc

$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t = N_a(P).$$

Par conséquent,

$$N_b(P) = |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)| \mathrm{d}t \leq 2N_a(P)$$

puisque l'intégrale est elle même plus petite que $N_a(P)$. Exactement de la même façon on obtient $N_a(P) \leq 2N_b(P)$ et donc finalement

$$\frac{1}{2} N_a(P) \leq N_b(P) \leq 2N_a(P),$$

et les deux normes sont équivalentes.

Exercice 2 On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est une matrice orthogonale et symétrique.
2. Justifier que M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres ainsi que son polynôme minimal **sans calculer son polynôme caractéristique**.

Correction :

1. On vérifie aisément que M est symétrique puisque ${}^t M = M$. Pour l'orthogonalité, notons (C_1, C_2, C_3) les 3 vecteurs colonnes de M. Alors on a

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \frac{1}{9} [1 \times 8 + 8 \times 1 + (-4) \times 4] = 0, \ \langle C_1, C_3 \rangle = \frac{1}{9} [1 \times (-4) + 8 \times 4 + (-4) \times 7] = 0, \text{etc.}$$

et

$$||C_1||^2 = \frac{1}{9^2} \left[1^2 + 8^2 + (-4)^2\right] = 1, \text{etc.}$$

2. On remarque que M est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ses valeurs propres, alors $\lambda_i \in \{-1, +1\}$ pour $1 \leq i \leq 3$ puisque M est la matrice d'un endomorphisme orthogonal, et M est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Tr}(M) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{7}{9} = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, et la seule possibilité pour les λ_i est donc que deux d'entre eux valent 1, par exemple $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$. Donc 1 et -1 sont toutes les deux valeurs propres, et puisque M est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples : il vaut donc $(X-1)(X+1)$.

Sujet 7

<u>Exercice 1</u> Soient a, b des réels tels que $|ab| < 1$. Montrer que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x + a\sin(y), y + b\sin(x)) . \end{array} \right.$$

réalise un $\mathbb{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Correction : Commençons par montrer que l'application f est injective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que (x,y) et (x',y') sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = f(x',y')$, autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' + a\sin(y') = x + a\sin(y) \\ y' + b\sin(x') = y + b\sin(x) \end{array} \right.$$

En regardant la première ligne, on a alors d'après l'inégalité des accroissements finis (puisque $\sin'(x) = -\cos(x) \leq 1$,

$$|x - x'| = |a||\sin(y) - \sin(y')| \leq |a||y - y'|$$

En regardant la deuxième ligne, on obtient de même

$$|y - y'| \leq |b||x - x'|,$$

et donc en combinant ces deux équations on obtient que si $y \neq y'$, alors

$$|y - y'| \leq |ab||y - y'| < |y - y'|$$

puisque par hypothèse, $|ab| < 1$. Donc c'est impossible, et on obtient que $y = y'$. De même, on montre que $x = x'$.

De plus, calculons les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial}{\partial_x}(x + a\sin(y)) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial_y}(x + a\sin(y)) = a\cos(y),$$

$$\frac{\partial}{\partial_x}(y + b\sin(x)) = b\cos(x), \quad \frac{\partial}{\partial_y}(y + b\sin(x)) = 1.$$

Ces dérivées partielles étant toutes continues et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit que f est de classe C^1 sur R^2. Par ailleurs, la matrice jacobienne de f est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & a\cos(y) \\ b\cos(x) & 1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant est $1 - ab\cos(x)\cos(y)$. Puisque $|ab| < 1$ par hypothèse, on a alors $|ab\cos(x)\cos(y)| < 1$, et donc ce déterminant est non nul, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle de f en (x,y) est inversible, et par conséquent on en déduit que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

<u>Exercice 2</u> Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites D et D' d'équations :

$$D := \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 4z & = -1 \\ x & - & 2y & + & z & = 3 \end{array} \right. \qquad D' := \left\{ \begin{array}{ccccccc} 11x & - & y & - & 7z & = \alpha \\ x & + & y & + & z & = 1 \end{array} \right. .$$

1. Les droites sont-elles parallèles, sécantes ou non-coplanaires ?
2. Pouvez-vous donner un système d'équations de D comprenant une des équations données pour D' ?
3. Donner un système d'équations cartésiennes du sous-espace affine engendré dans $\mathbb{R}^3$ par les deux droites.

Correction :

1. Considérons d'abord les sous-espaces vectoriels E et E' de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E := \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 4z & = 0 \\ x & - & 2y & + & z & = 0 \end{array} \right. \qquad E' := \left\{ \begin{array}{ccccccc} 11x & - & y & - & 7z & = 0 \\ x & + & y & + & z & = 0 \end{array} \right.$$

déterminant les directions de D et D' respectivement, dont on va déterminer des bases. En échelonnant le premier système, on obtient les conditions $x = \dfrac{5}{7}z$ et $y = \dfrac{6}{7}z$, donc la première droite est engendrée par le vecteur $u_1 := (5, 6, 7)$. En échelonnant le second système, on obtient les conditions $x = \dfrac{1}{2}z$ et $y = -\dfrac{3}{2}z$ donc la deuxième droite est engendrée par le vecteur $u_2 := (1, -3, 2)$. Ces deux droites ont donc des vecteurs directeurs non colinéaires : elles ne sont donc pas parallèles. Leur interesection est donc réduite à un point si il existe un triplet (x, y, z) tel que

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 4z & = -1 \\ x & - & 2y & + & z & = 3 \\ 11x & - & y & - & 7z & = \alpha \\ x & + & y & + & z & = 1 \end{array} \right. ,$$

et est vide sinon (autrement dit les deux droits sont non-coplanaires). Pour cela, déterminons si le vecteur $(-1, 3, \alpha, 1)$ est dans l'image de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - 4z, x - 2y + z, 11x - y - 7z, x + y + z).$$

D'après ce qui précède, $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ donc par la théorème du rang $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3. Pour vérifier si le vecteur $(-1, 3, \alpha, 1)$ est dedans, on calcule le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ x & -2 & 1 & 3 \\ 11 & -1 & -7 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

qui vaut $18\alpha - 216$, et il est donc nul lorsque $\alpha = 12$. D'où on en déduit que pour $\alpha = 12$, les deux droites sont sécantes, et pour $\alpha \neq 12$, elles sont coplanaires. Si $\alpha = 12$, on obtient alors par résolution du système que le point d'intersection est donné par $M := \left(\dfrac{23}{18}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{7}{18} \right)$.

Remarque : En faisant $3L_1 + 5L_2$ sur les lignes du système caractérisant D, on obtient l'équation $11x - y - 7z = 12$, or dans D' on a l'équation $11x - y - 7z = \alpha$, donc on en déduit qu'on doit nécessairement avoir $\alpha = 12$ pour que les deux droites s'intersectent, ce qui confirme ci-dessus.

2. D'après la question 1., si $\alpha \neq 12$, alors les deux droites sont coplanaires, et dans ce cas le sous-espace affine engendré par ces 2 droites est l'espace affine $\mathbb{R}^3$ lui-même, puisque l'espace engendré comporte 3 directions : celles des deux droites et une reliant un point fixé entre les deux droites. Si $\alpha = 12$, alors D et D' sont sécantes, et engendrent un espace affine de dimension 2, dont la direction est donnée par $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et un point est M, le point d'intersection de D et D'.

   Pour en déterminer une équation cartésienne, on va déterminer un vecteur normal à u_1 et u_2 en résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 5x & + & 6y & + & 7z & = 0 \\ x & - & 3y & + & 2z & = 0 \end{array} \right.$$

   Par résolution, on trouve qu'un vecteur normal à D et D' est donné par $(-11, 1, 7)$, et donc l'équation cartésienne du plan engendré par D et D' est de la forme

$$-11x + y + 7z + d = 0,$$

et on trouve d en injectant les coordonnées du point M :

$$-11 \times 23 + 1 \times (-12) + 7 \times 7 + 18d = 0,$$

et donc $d = 12$, donc finalement l'équation cartésienne du plan engendré par D et D' est

$$-11x + y + 7z + 12 = 0.$$

Sujet 8

Exercice 1 Donner une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Correction : On va orthonormaliser, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt la base canonique $(1, X, X^2)$. Commençons par normaliser 1 :

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1dt} = \sqrt{2}$$

On pose donc :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Considérons ensuite $Q_1(X) = X + \lambda P$ où λ est choisi de sorte que $\langle Q_1, P \rangle = 0$. Mais, $\langle Q_1, P \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}dt + \lambda \langle P, P \rangle = 0$. On doit donc avoir $\lambda = 0$ (en réalité, les deux vecteurs 1 et X sont déjà orthogonaux !), et donc $Q_1 = X$. On normalise ce vecteur en

$$Q(X) = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$

On pose enfin $R_1 = X^2 + \lambda P + \mu Q$ de sorte que $\langle R_1, P \rangle = 0$ et $\langle R_1, Q \rangle = 0$. Mais, X^2 est déjà orthogonal à X, et donc par un calcul similaire au précédent, on va trouver que $\mu = 0$. D'autre part,

$$\langle R_1, P \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2 dt + \lambda = \frac{\sqrt{2}}{3} + \lambda.$$

D'où $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ et donc :

$$R_1(X) = X^2 - \frac{1}{3}.$$

Il reste donc à renormaliser :

$$\|R_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{8}{45}}.$$

On a donc :

$$R(X) = \sqrt{\frac{5}{8}} \left(3X^2 - 1\right)$$

.

La base cherchée est donc $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3X^2 - 1\right)$.

Exercice 2 On considère la fonction définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{pour} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pour} \quad (x, y) = (0, 0) \end{array} \right. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue, différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f ne vérifie pas le théorème de Schwarz.

Corrigé :

1. Montrer que f est continue, différentiable et calculer sa différentielle. Ici on voit bien que le seul problème qu'il peut y avoir est en $(0,0)$. Or $|x^2-y^2| \leq x^2+y^2$ d'où $|f(x,y)| \leq xy$ et la fonction f est bien continue en $(0,0)$.
   Soit$(x,y) \neq 0$. On a :
$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$
   On remarque que le numérateur est un polynôme de degré 5 en (x,y). On a donc $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$ et f est bien différentiable en 0. On a donc :
$$df = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}dy.$$
2. Montrer que f ne vérifie pas le théorème de Schwarz. On remarque :
$$\partial_y f(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x \text{ et } \partial_x f(0,y) = -\frac{y^5}{y^4} = -1.$$
   On a donc :
$$\partial_x \partial_y f(0,0) = -1 \text{ et } \partial_y \partial_x f(0,0) = 1.$$
   f ne vérifie donc pas le théorème de Schwarz.

Sujet 9

Exercice 1 Déterminer une équation du plan parallèle à l'axe (Ox) passant par les points $A(0,1,2)$ et $B(2,-1,0)$.

Corrigé : On sait que $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-2)$ est un des vecteurs directeur du plan. De plus, le plan est parallèle à l'axe (Ox) de vecteur directeur $(1,0,0)$ non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. La droite issue de A et de vecteur directeur $(1,0,0)$ est donc contenue dans le plan. Soit $M(x,y,z)$ un point de P. On peut donc se donner $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\overrightarrow{AB}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0+\lambda+2\mu \\ y & = & 1-2\mu \\ z & = & 2-2\mu \end{array}\right. .$$

C'est la représentation paramétrique du plan. Une méthode pour déterminer l'équation cartésienne du plan serait d'éliminer λ et μ des équations ou sinon plus simplement :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-1 & 0 & -2 \\ z-2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation du plan est donc $2(y-z+1) = 0$ soit $y-z+1=0$.

Exercice 2 On considère

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^n \\ M & \mapsto & \left(\mathrm{Tr}(M), \mathrm{Tr}(M^2), \cdots, \mathrm{Tr}(M^n)\right). \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle. Montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$.

2. Montrer que l'ensemble des matrices M telles que $Df(M)$ soit de rang maximal correspond exactement à l'ensemble des matrices telles que leur polynôme minimal π_M soit de degré n, c'est-à-dire :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{rg}\,(Df(M)) = n\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \deg(\pi_M) = n\}.$$

3. En conclure que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \deg(\pi_M) = n\}$ est un ouvert.

Corrigé :

1. L'application Tr est une application polynômiale des coefficients de M de même que l'application F_k : $M \mapsto M^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. f est donc bien différentiable en que composé d'applications différentiables. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. Attention ici rien nous garantit que $HM = MH$, on ne peut pas utiliser le binôme de Newton directement. En revanche, on sait que $\mathrm{Tr}(MH) = \mathrm{Tr}(HM)$. De plus la trace est linéaire, on va utiliser la règle de la chaîne en posant $f_k : M \mapsto \mathrm{Tr}(M^k)$:

$$df_{k,M}(H)) = \mathrm{Tr}(dF_{k,M}(H)) \text{ et } (M+H)^k = M^k + HM^{k-1} + \cdots + M^{k-1}H + R(H)$$

avec $R(H)$ le reste qui contient au moins deux termes en H et donc en $o(\|H\|)$. Avec la commutativité à l'intérieur de la trace, on trouve :

$$df_M(H) = {}^t\left(\mathrm{Tr}(H), 2\mathrm{Tr}(MH), \cdots, n\mathrm{Tr}(M^{n-1}H)\right).$$

2. Ici nous proposons trois approches. La première consiste à se rappeler que l'application $\Phi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^tB)$ est un produit scalaire. De plus, le degré du polynôme minimal de M correspond au rang de la famille $(I_n, M, \cdots, M^{n-1})$. D'après le théorème du rang, connaître le rang est équivalent à connaitre la dimension du noyau. On sait que :

$$df_M(H) = \left(\mathrm{Tr}(H), 2\mathrm{Tr}(MH), \cdots, n\mathrm{Tr}(M^{n-1}H)\right) = \left(\Phi(H^t, I_n), \Phi(H^t, M), \cdots, \Phi(H^t, M^{n-1})\right).$$

Donc déterminer l'espace vectoriel des H tels que $df_M(H) = 0$ est égal à la dimension de l'orthogonal de la famille $(I_n, M, \cdots, M^{n-1})$. D'où l'équivalence. Une autre manière de le voir avec les formes linéaires (orthogonalité et dualité sont des choses liées), on pose la forme linéaire :

$$\Phi_M : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ H & \mapsto & \mathrm{Tr}(MH) \end{array} \right.$$

L'application $M \mapsto \Phi_M$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur son dual. Les formes linéaires $(\Phi_{M^k})_0^{n-1}$ sont donc de même rang que la famille $(I_n, M, \cdots, M^{n-1})$. D'où $\dim(\ker(df(M)) = n^2 - d$ et $\mathrm{rg} df(M) = d$. Enfin une dernière manière par le déterminant de Vandermonde, si c'est plus simple pour vous, on diagonalise M dans $\mathbb{C}$. On obtient donc que le rang de df est donnée par le rang de la matrice de Vandermonde. Si df est de rang maximal, on obtient que toutes les valeurs propres **complexes** de M sont deux à deux distinctes et que par conséquent le polynôme minimal coïncide avec le polynôme annulateur.

3. D'après la question précédente, on a $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \deg(\pi_M) = n\} = (\det(df(M)))^{-1}(\mathbb{R}^*)$. Par continuité de la composition et des deux applications (multinomialité des coefficients...), $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \deg(\pi_M) = n\}$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue et est donc ouvert.

Sujet 10

<u>Exercice 1</u> On considère

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^{-1}. \end{array} \right.$$

Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Correction : Soit $M, X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme $||M|| = \sup_{||x=1||} ||Mx||$, on a alors

$$\begin{aligned} f(M+H) &= (M+H)^{-1} = (M(I_n + M^{-1}H))^{-1} \\ &= (I_n + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} \\ &= f(I_n + M^{-1}H)M^{-1} \\ &= \left[f(I_n) + Df_{I_n}(M^{-1}H) + \circ(||M^{-1}H||)\right])M^{-1} \end{aligned}$$

On voit donc qu'il nous faut calculer la différentielle de f en I_n. Or pour $||H|| < 1$, on a

$$(I_n + H)^{-1} = I_n - H + H^2 - H^3 + \cdots = I_n - H + \varepsilon(H)H,$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque H tend vers 0. D'où on en déduit par définition que $Df_{I_n}(H) = -H$, et donc en reprenant le calcul ci dessus :

$$\begin{aligned} f(M+H) &= \left[f(I_n) - M^{-1}H + \circ(||M^{-1}H||)\right] M^{-1} \\ &= M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \circ(||M^{-1}H||)M^{-1} \end{aligned}$$

Or la norme sur GL_n étant sous-multiplicative, on a alors $||M^{-1}H|| \leq ||M^{-1}H||$ et donc $\circ(||M^{-1}H||)M^{-1} = \circ(||H||)$. De plus, l'application $H \mapsto M^{-1}HM^{-1}$ est linéaire, et donc on en déduit que

$$Df_M(H) = -M^{-1}HM^{-1}.$$

Autre méthode : On sait que l'inverse d'une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est donné par la formule

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\mathrm{Com}(A),$$

où $\mathrm{Com}(A)$ désigne la comatrice de A. Dans cette formule, les coefficients de la comatrice sont obtenus par des polynômes en les coefficients de A, et donc cette fonction est polynômiale en les coefficients de A. Une fonction polynômiale étant nécessairement différentiable (et même $\mathcal{C}^\infty$), on en déduit que f est différentiable (et même $\mathcal{C}^\infty$).

Exercice 2 Soit $u \in \mathbb{Q}$. Vérifier que les deux ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de $\mathbb{Q}^4$ définis respectivement par :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & u \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 2u \end{array}\right.$$

sont des sous-espaces affines de $\mathbb{Q}^4$ dont on donnera pour chacun un point, l'espace directeur et la dimension. Pour quelle valeur de u s'intersectent-ils ? Donner alors un point, l'espace directeur et la dimension de l'intersection.

Correction : On considère E_1 et E_2 les sous-ensembles de $\mathbb{Q}^4$ définis par

$$E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \mid \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4 \mid \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.\right\}$$

On vérifie facilement que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{Q}^4$, qui seront les directions respectives de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Il nous reste alors à trouver des points dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, c'est à dire des solutions des systèmes décrits par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Pour $\mathcal{E}$, on voit que l'élément $(\frac{u}{2}, 0, 0, -\frac{u}{2})$ est solution du système, et donc on en déduit que

$$\mathcal{E} = (\frac{u}{2}, 0, 0, -\frac{u}{2}) + E = (\frac{u}{2}, 0, 0, -\frac{u}{2}) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}((0,1,0,1), (-1,0,1,0)).$$

est un espace affine de direction $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}((0,1,0,1), (-1,0,1,0))$ et est donc de dimension 2.

Pour $\mathcal{F}$, l'élément $\left(\frac{1+2u}{2}, \frac{1-2u}{2}, 0, 0\right)$ est une solution particulière du système, et en échelonnant le système on trouve qu'une base de F est donnée par les vecteurs $((-2,0,1,0),(-2,1,0,1))$. On en déduit que

$$\mathcal{F} = \left(\frac{1+2u}{2}, \frac{1-2u}{2}, 0, 0\right) + F = \left(\frac{1+2u}{2}, \frac{1-2u}{2}, 0, 0\right) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}((-2,0,1,0),(-2,1,0,1)).$$

Comme les deux espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont de dimension 2 dans un espace de dimension 4 ayant des directions distinctes, on en déduit que leur intersection est de dimension ≤ 1 : c'est donc soit vide, soit un point, soit une droite affine. Déterminons l'intersection des directions $E \cap F$:

$$(x,y,z,t) \in E \cap F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.$$

En échelonnant ce système, on trouve les conditions $x = 2t, y = t$ et $z = -2t$, et donc on en déduit que $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^4$ de dimension 1 engendré par le vecteur $(2,1,-2,1)$. Ainsi, l'intersection de $\mathcal{E}$ est $\mathcal{F}$ est soit vide, soit une droite affine si il existe un vecteur $(x,y,z,t) \in \mathbb{Q}^4$ solution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & u \\ x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 2u \end{array}\right.$$

Cela revient à se demander si le vecteur $(0,u,1,2u)$ est dans l'image de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q}).$$

Comme cette matrice est de rang 3 (on vient de voir que son noyau est de dimension 1), il suffit pour cela de calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & u \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2u \end{pmatrix},$$

qui est $2(1-u)$. Donc l'intersection est vide si $u \neq 1$, et est une droite affine si $u = 1$, avec pour direction $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(2,1,-2,1)$ et pour point $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$.