# Feuille 5 : Applications linéaires

**Exercice 1**
Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des applications linéaires :
**1.** La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (0, 2y)$.
**2.** La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (x+3, y)$.
**3.** La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ donnée par $f(x) = 1/x$.
**4.** La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = (y^2, x-y)$.
**5.** La fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y,z) = (x+z, y+z)$.

**Exercice 2**
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications linéaires.
Montrer que $x \mapsto f(x) + g(x)$ est linéaire et que $x \mapsto f(x)g(x)$ n'est pas linéaire.

**Exercice 3. La Trace matricielle**
Pour une matrice carré réelle $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit l'application trace par $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.
**1.** Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $Tr(A)$, $Tr(B)$ et $Tr(A+B)$.
**2.** Montrer que l'application trace est linéaire.

**Exercice 4.**
Soit $f$ l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par $f(x,y) = \alpha(x,y)$.
**1.** Montrer que c'est une application linéaire.
**2.** Déterminer $\ker f$.
**3.** Soit $(x', y') \in \mathbb{R}$, représenter graphiquement son antécédent par $f$. En déduire $\mathrm{Im} f$.

**Exercice 5.**
Soit $R_\theta$ la rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}^2$.
**1.** Vérifier graphiquement que $R_\theta(\lambda x) = \lambda R_\theta(x)$.
**2.** Vérifier graphiquement que $R_\theta(x+y) = R_\theta(x) + R_\theta(y)$.
**3.** Que peut-on en déduire sur $R_\theta$ ?

**Exercice 6.**
Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f^2 (= f\circ f) = f$ (on dit que $f$ est un projecteur).
**1.** Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
**2.** Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Im} f$.
**3.** En déduire que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires.
**4.** Soit $p$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x,y) = (x,x)$.

(i) Montrer que c'est une projection.
(ii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette $p$
(iii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette $\mathrm{Id} - p$

**Exercice 7.**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$.
**1.** Montrer que $f$ est linéaire.
**2.** Donner une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de $f$.

**3.** Donner une base de $\text{Im}(f)$.

**Exercice 8.**
Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
**1.** Calculer l'image des vecteurs de la base canonique par $f$. En déduire le rang de $f$.
**2.** Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

**Exercice 9.**
Soit $\Phi$ la fonction définie sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi : f \longmapsto \Big(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\Big).$$

**1.** Montrer que $\Phi$ est linéaire.
**2.** Déterminer son noyau.
**3.** Déterminer son image.

**Exercice 10.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On considère la fonction définie dans l'espace des suites et donnée par

$$f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

**1.** Montrer que $f$ est une application linéaire.
**2.** Quelle relation doit vérifier les coefficients $u_{n+2}, u_{n+1}$ et $u_n$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour être dans le noyau de $f$ ?
**Rq.** pour une base de noyau, cf l'exercice du TD Espaces vectoriels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

**Exercice 11.**
Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$. On considère l'application définie dans l'espace des fonctions de classe $C^1$, à valeur dans l'espace des fonctions continues et donnée par

$$f(y) = y' + y$$

**1.** Montrer que $f$ est une application linéaire.
**2.** Déterminer toutes les fonctions $y$ de classe $C^1$ telles que $y' + y = 0$.
**3.** En déduire une base du noyau de $f$.

**Exercice 12.**
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par $f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.
**1.** Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = Vect(a)$.
**2.** Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

a. Calculer $f(b)$ et $f(c)$.

b. En déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\text{Im}(f)$. (On peut utiliser une autre méthode.)

**3.** Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\text{Im}(f)$ (i.e. pour $(x, y, z) \in \text{Im}f$ avoir des relations entre $x, y, z$).
**4.** A-t-on $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ ?

**Exercice 13.**
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3;\ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3;\ u(e_3) = 3f_1 - f_3;\ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

**1.** Déterminer l'image par $u$ du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
**2.** Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
**3.** Déterminer une base de $\text{Im}(u)$ et le rang de $u$.

**Exercice 14.**
Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$( $=$ l'ensemble des polynômes de degré 2).
Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = P + (1 - X)P'$.
**1.** Montrer que $u$ est une application linéaire. De plus, montrer que $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
**2.** Déterminer $\ker(u)$.
**3.** Déterminer $\dim(\ker(u))$ et le rang de $u$.
**4.** Calculer l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ par $u$. En déduire une base de $\text{Im}(u)$.

**Exercice 15.**
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $p$. Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $E$.
**1.** Soit $k$ un entier. Montrer que $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$.
**2.** Comparer $\dim(\ker f^k)$ et $\dim(\ker f^{k+1})$.
**3.** Soit $k$ un entier. Montrer que $\text{Im}\, f^{k+1} \subset \text{Im} f^k$.
**4.** Comparer $\dim(\text{Im}\, f^k)$ et $\dim(\text{Im}\, f^{k+1})$.
**Question hors-TD.** Déterminer la monotonie de la suite entière $(\dim(\ker f^k))_k$. En déduire qu'à partir d'un certain rang $k_0$ la suite est constante. (Idem pour $(\dim(\text{Im}\, f^k))_k$)

**Exercice 16. - Question de cours**
Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Montrer que [$u$ est injective] $\Leftrightarrow$ [$\ker u = \{0_E\}$].

**Exercice 17.**
Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
**1.** Montrer que si $v_1, v_2, ..., v_p$ engendrent $\mathbb{R}^n$ alors $f(v_1), f(v_2), ...f(v_p)$ engendrent $\text{Im}(f)$.
**2.** Montrer que si $f(v_1), f(v_2), ..., f(v_p)$ forment un système libre alors $v_1, v_2, ..., v_p$ est libre aussi.
**3.** Montrer que si $f$ est injective et si $v_1, ..., v_p$ est un système libre alors $f(v_1), ..., f(v_p)$ est libre aussi.

**Exercice 18.**
Soit $u : E \to E$ une application linéaire et $\lambda$ un réel. Soit $E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$.
**1.** Calculer $u(x)$ pour $x \in E_\lambda$. Montrer que $E_\lambda$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
**2.** Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
**3.** Si $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

**Exercice 19.**
Soient $E$, $F$, $G$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, avec $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$ et $g$ une application linéaire de $F$ dans $G$.
**1.** Montrer que $[\text{Im} f \subset \ker g] \Leftrightarrow [g \circ f(x) = 0 \ \forall x \in E]$.

**Exercice 20.**
Soit $u : E \to E$ une application linéaire, $E$ étant un espace vectoriel de dimension $n$ pair. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
**(a)** $u^2(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $n = 2\dim(\text{Im}(u))$. **(b)** $\text{Im}(u) = \ker(u)$.