Université Claude Bernard (Lyon 1) 2020-2021 Printemps
UE MathIV Algèbre Géométrique L2

Corrigé de la Fiche 1

Rappel : Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) de dimension finie n. Une forme bilinéaire sur E est une application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) satisfaisant :
- $\phi(u, v_1 + v_2) = \phi(u, v_1) + \phi(u, v_2)$,
- $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$,
- $\phi(\lambda u, v) = \lambda\phi(u, v)$,
- $\phi(u, \mu v) = \mu\phi(u, v)$.

Autrement dit, pour tout u vecteur de E, les applications $E \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \phi(u, v)$ et $v \mapsto \phi(v, u)$ sont des applications linéaires.

Si on connait une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, alors une application bilinéaire ϕ est entièrement déterminée par les valeurs des éléments

$$\phi(e_i, e_j) \text{ pour } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

On appelle *matrice de la forme bilinéaire* ϕ dans la base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ la matrice carrée de taille n définie par

$$M_{\phi,\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & \phi(e_1,e_2) & \ldots & \phi(e_1,e_n) \\ \phi(e_2,e_1) & \phi(e_2,e_2) & \ldots & \phi(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \phi(e_n,e_1) & \phi(e_n,e_2) & \ldots & \phi(e_n,e_n) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'entrée en ligne i et colonne j de cette matrice est $\phi(e_i, e_j)$.

Ensuite, pour x et y des vecteurs quelconques de E, on a alors

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix} M_{\phi,\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tX M_{\phi,\mathcal{B}} Y$$

où X est le vecteur colonne donnant les coefficients de la décomposition de x dans la base $\mathcal{B}$, idem pour Y avec y.

Exercice 1 S oit $E = \mathbb{R}^2$ avec la base canonique $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. On définit une forme bilinéaire β par la formule $\beta((a, b), (a', b')) = aa' + 2ab' + 4a'b + 5bb'$.

1. On a $\phi((1, 0), (1, 0)) = 1 \times 1 + 2 \times 1 \times 0 + 4 \times 1 \times 0 + 5 \times 0 \times 0 = 1$.
   De même, $\phi((1, 0), (0, 1)) = 2$, $\phi((0, 1), (1, 0)) = 4$, $\phi((0, 1), (0, 1)) = 5$. D'où
   $$M_{\beta,(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a
   $$\beta(f_1, f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 12, \qquad \beta(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2,$$
   $$\beta(f_2, f_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6, \qquad \beta(f_2, f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$
   Autre méthode : $\beta(f_1, f_1) = \beta(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = \beta(e_1, e_1) + \beta(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_1) + \beta(e_2, e_2) = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$.

(b) La matrice de passage de la base (e_1, e_2) est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(on écrit sur la 1ère colonne la décomposition de f_1 dans la base (e_1, e_2) et dans la 2ème colonne la décomposition de f_2). On a alors

$${}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) **Rappel :** L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n se décompose en somme directe de l'espaces des matrices symétriques (càd telles que $A = {}^tA$) et des matrices anti-symétriques (càd telles que $A = -{}^tA$). La décomposition d'une matrice A quelconque est donnée par

$$A = \frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}.$$

On constate facilement que le premier terme est symétrique (puisque ${}^t({}^tA) = A$) et le deuxième est antisymétrique.
La décomposition de M est alors donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si on veut écrire β sous la forme $\beta_{sym} + \beta_{asym}$ où β_{sym} est une forme bilinéaire symétrique et β_{asym} est antisymétrique, alors

$$\begin{aligned}\beta_{sym}(xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2) &= xx'\beta_{sym}(e_1, e_1) + xy'\beta_{sym}(e_1, e_2) + yx'\beta_{sym}(e_2, e_1) + yy'\beta_{sym}(e_2, e_2) \\ &= xx' + 3xy' + 3yx' + 5yy'\end{aligned}$$

Autrement dit : $\beta_{sym}((x, y), (x', y') = xx' + 3xy' + 3yx' + 5yy'$, et on vérifie que c'est bien symétrique car on obtient la même chose si on échange (x, y) et (x', y').
De même, on obtient que $\beta_{asym}((x, y), (x', y')) = -xy' + yx'$. On vérifie alors aussi que $\beta_{sym}((x, y), (x', y')) + \beta_{asym}((x, y), (x', y')) = xx' + 3xy' + 3yx' + 5yy' - xy' + yx' = xx' + 2xy' + 4yx' + 5yy'$.

Exercice 2 (Changement de base $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.) Soit $E = \mathbb{R}^3$ avec la base canonique (e_1, e_2, e_3). On définit une forme bilinéaire $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

On vérifie alors :

$$\phi(e_1, e_1) = 1, \phi(e_2, e_2) = 2, \phi(e_3, e_3) = 3$$

et $\phi(e_i, e_j) = 0$ si $1 \leq j \leq 3$ et $i \neq j$. Donc la matrice de ϕ dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit B une base formée de vecteurs $h_1 = e_1 + e_2 + e_3, h_2 = e_1 + e_2 - e_3, h_3 = e_1 - e_2 - e_3$.

1. On a

$$\phi(h_1,h_1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = 6, \quad \phi(h_1,h_2) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = 0,$$

$$\phi(h_1,h_3) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix} = -4, \quad \phi(h_2,h_1) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = 0,$$

$$\phi(h_2,h_2) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = 6, \quad \phi(h_2,h_3) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix} = 2,$$

$$\phi(h_3,h_1) = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = -4, \quad \phi(h_3,h_2) = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = 2,$$

$$\phi(h_3,h_3) = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix} = 6$$

   Donc la matrice de ϕ dans la base canonique est donnée par

$$M_{\phi,B} = \begin{pmatrix}6 & 0 & -4\\ 0 & 6 & 2\\ -4 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

2. Soit C la matrice de passage de la base canonique vers la base B, alors on a

$$C = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

   et on obtient alors

$$M_{\phi,B} = {}^tCMC = \begin{pmatrix}6 & 0 & -4\\ 0 & 6 & 2\\ -4 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Matrice orthogonale) Soit E un espace réel de dimension fini n et $\mathcal{B}_e = \{e_i\}$ et $\mathcal{B}_f = \{f_i\},\ i \in \{1, \cdots, n\}$ deux bases de cet espace. Soit C la matrice de passage de $\mathcal{B}_e$ vers $\mathcal{B}_f$.

1. **Rappel de cours :** Si $\phi : E \to E$ est une application linéaire, alors on a

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_\mathbf{f}}(\phi) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}_{\mathcal{B}_\mathbf{e}}(\phi)\mathbf{P}$$

   où $M_{\mathcal{B}_e}(\phi)$ et $M_{\mathcal{B}_f}(\phi)$ sont les matrices de l'endomorphisme ϕ dans les bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_f$ respectivement, et P est la matrice de passage **de la base $\mathcal{B}_e$ vers la base $\mathcal{B}_f$**.
   Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, on a alors

$$A' = C^{-1}AC.$$

2. **Rappel de cours :** Si $\beta : E \times E \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, alors on a

$$\mathbf{M}_{\beta,\mathcal{B}_\mathbf{f}} = {}^\mathbf{t}\mathbf{P}\mathbf{M}_{\beta,\mathcal{B}_\mathbf{e}}\mathbf{P}$$

   où $M_{\beta,\mathcal{B}_e}$ et $M_{\beta,\mathcal{B}_f}$ sont les matrices de l'endomorphisme ϕ dans les bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_f$ respectivement, et P est la matrice de passage **de la base $\mathcal{B}_e$ vers la base $\mathcal{B}_f$**.
   Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, on a alors

$$A'' = {}^tCAC.$$

3. Si on suppose que $C^tC = I$, alors par unicité de l'inverse d'une matrice carrée inversible, on a alors ${}^tC = C^{-1}$ et également ${}^tCC = I$. Donc
$$ {}^tCAC = C^{-1}AC, \text{autrement dit } A' = A''. $$
Soit
$$ C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et alors } {}^tC = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{n,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \dots & c_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,n} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} $$
et on suppose que $C^{-1} = ^t C$.
   (a) On a vu qu'on a ${}^tCC = I$, d'où
$$ \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{n,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \dots & c_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1,n} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} $$
   a. Ainsi, pour $1 \leq i \leq n$, si on regarde le coefficient en ligne i et colonne i, on a 1 à droite, et $c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \cdots + c_{n,i}^2$ à gauche, d'où l'égalité.

   b. De même, si on prend $1 \leq i \neq j \leq n$, on a alors 0 à droite et $c_{1,i}c_{1,j} + c_{2,i}c_{2,j} + \cdots + c_{n,i}c_{n,j}$ à gauche, d'où la deuxième égalité.

   c. Fixons $1 \leq i \leq n$, d'après la question **a.**, on a $c_{1,i}^2 + c_{2,i}^2 + \cdots + c_{n,i}^2 = 1$ donc, chacun des termes étant positif, on en déduit que pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $c_{j,i}^2 \leq 1$, et donc $|c_{j,i}| \leq 1$.
   (b) Rappelons que le *produit scalaire* usuel sur $\mathbb{R}^n$ est défini par $\phi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, et on appelle *norme euclidienne* la norme associée à ce produit scalaire, définie par $||x|| := \phi(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
   Nous venons ainsi de montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $||c_i|| = 1$ et pour tous $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$, alors $\phi(c_i, c_j) = 0$. Autrement dit, les vecteurs (c_i) sont **orthonormés** par rapport à ϕ, c'est à dire que ils sont deux à deux orthogonaux et chacun est de norme 1.
   (c) En regardant non pas le produit ${}^tCC = I$ comme ci-dessus mais $C^tC = I$, on obtient exactement les mêmes conditions que **a.** et **b.** pour les vecteurs (d_i).

Rappel : Un produit scalaire d'un espace vectoriel E est une forme bilinéaire $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés supplémentaires :
— ϕ est *symétrique*, càd $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ pour tous x, y de E.
— ϕ est *définie positive*, càd $\phi(x, x) = 0$ implique $x = 0$ et $\phi(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 4 (Produit scalaire : exemples élémentaires)
1. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?
   (a) *L'application $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui au couple de vecteurs (u, u') associe $xx' + yy' + xy' + yx'$ si $u = (x, y)$ et $u' = (x', y')$ dans une base fixée.*
   La première chose à vérifier en général est que la forme donnée est bien bilinéaire. Ici, on vérifie facilement que c'est le cas (en pratique, lorsqu'on a juste des termes 'linéaires' où on multiplie les coefficients entre eux, sans carrés et sans termes constants ce sera bilinéaire).
   Ensuite, on s'intéresser au côté symétrique, et défini positif. Ici, β est symétrique car
$$ \beta((x', y'), (x, y)) = x'x + y'y + x'y + y'x = xx' + yy' + xy' + yx' = \beta((x, y), (x', y')), $$

càd on obtient le même résultat si on permute x et x', et y et y'. En revanche, ce ne sera pas un produit scalaire car on vérifie que β **n'est pas définie**. En effet, pour $x, y \in E$, on a

$$\beta((x,y),(x,y)) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2,$$

Mais si on prend $x = -y$, par exemple $(x,y) = (1,-1)$, on a alors $\beta(x,y) = 0$ alors que $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) *L'application* $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui au couple de vecteurs* (u,u') *associe* $2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y$ *si* $u = (x,y)$ *et* $u' = (x',y')$ *dans une base fixée.*

On devrait tout d'abord également vérifier que β est bien bilinéaire, ce qui est le cas car comme ci-dessus nous avons que des termes linéaires. La symétrie est également vérifiée car si on échange x et x', et y et y', les deux premiers termes de $\beta((x',y'),(x,y))$ restent les mêmes, et les deux suivants sont échangés.

Pour le côté défini, considérons $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta((x,y),(x,y)) = 0$. On a alors

$$2x^2 + 3y^2 + 4xy = 0 \Rightarrow 2(x+y)^2 + y^2 = 0.$$

Par somme de termes positifs, on en déduit que chacun des carrés ci-dessus doit être égal à 0, d'où $y = 0$ et $x + y = 0$, ce qui implique $x = y = 0$, donc β est bien définie. L'écriture ci-dessus nous montre également que β est définie positive, puisque si $(x,y) \neq 0$, alors on a soit $y^2 > 0$, soit $2(x+y)^2 > 0$. Donc β est un produit scalaire.

(c) *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a < b$ *et soit* E *l'espace des fonctions continues* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*. On définit* $\beta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *par* $\beta(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$*.*

Par linéarité de l'intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$ ($\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$), on montre que cette application est bien bilinéaire. Pour la symétrie, on a

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

Pour une fonction f continue sur $[a,b]$, on a

$$\beta(f,f) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Or $t : [a,b] \mapsto f^2(t)$ est positive sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle, d'où (propriété classique sur les intégrales sur des intervalles de $\mathbb{R}$) f^2 est la fonction nulle, et f est la fonction nulle.

De même, si f est une fonction non nulle,

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t > 0$$

puisque cette intégrale mesure l'aire entre les axes $x = a$, $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f, qui est au dessus de l'axe des abscisses puisque $f^2(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]$, et l'aire n'est pas nulle puisque f n'est pas identiquement nulle. Donc β est un produit scalaire.

2. *Quelles sont les conditions sur* $a, b \in \mathbb{R}$ *pour que l'application* $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\beta((x,y),(x',y')) = axx' + 2bxy' + 2bx'y + byy'$ *soit un produit scalaire.*

On constate que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, la forme β sera bien bilinéaire. Par ailleurs, elle est bien symétrique puisqu'on a le même coefficient $2b$ devant les termes 'croisés', ainsi

$$\beta((x',y'),(x,y)) = \beta((x,y),(x',y')) \text{ pour tous } (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$$

Cherchons pour quelles valeurs de a et b elle est définie. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\beta((x,y),(x,y)) = ax^2 + 4bxy + by^2.$$

Supposons $b = 0$, alors $\beta((x,y),(x,y)) = 0 \Rightarrow ax^2 = 0$ pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d'où $a = 0$ et β est l'application nulle. Si $b \neq 0$, alors

$$\beta((x,y),(x,y)) = b\left(y^2 + 4xy + \frac{a}{b}x^2\right) = b\left((y+2x)^2 + \left(\frac{a}{b} - 4\right)x^2\right) = b(y+2x)^2 + (a-4b)x^2$$

On remarque alors que si $b > 0$ et $a - 4b > 0$, alors on a

$$\beta((x,y),(x,y)) = 0 \Rightarrow b(y+2x)^2 = 0 \text{ et } (a-4b)x^2 = 0$$

en tant que somme de deux termes positifs, donc $x = 0$ et par suite $y = 0$. Réciproquement, si on veut que β soit définie positive il faut que pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on ait $\beta((x,y),(x,y)) > 0$. Or si on prend par exemple $(0,1)$, on obtient $\beta((0,1),(0,1)) = by^2$ donc on doit avoir $b > 0$. De même, si on prend $y = -2x$ pour un $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\beta(x,-2x) = (a-4b)x^2$$

d'où on doit avoir $a - 4b > 0$. Les conditions sont donc $\mathbf{b > 0}$ et $\mathbf{a - 4b > 0}$.

3. *On notera V les nombres complexes que l'on verra comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Vérifier que $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque paire de nombres complexes (α, β) associe $Re(\alpha\bar{\beta})$ est un produit scalaire.*

   Rappelons que $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, avec par exemple pour base $(1, i)$, puisque tout nombre complexe se décompose de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

   On vérifie que β est bien bilinéaire, par linéarité de l'application $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$. Elle est symétrique : soit $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ et $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, alors

$$\alpha\overline{\beta} = (\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2) = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + i(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)$$

   de sorte que $b(\alpha,\beta) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \mathrm{Re}(\alpha)\mathrm{Re}(\beta) + \mathrm{Im}(\alpha)\mathrm{Im}(\beta)$, ce qui est symétrique si on échange α et β. De plus, si $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$, nous venons de voir que

$$b(\alpha,\alpha) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,$$

   et ceci est strictement positif sauf si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, autrement dit $\alpha = 0$. Donc b est définie positive, et c'est un produit scalaire.

Exercice 5 (D'autres exemples, orthogonalité)

1. On vérifie que cette application est bien bilinéaire puisque

$$\sum_{k=0}^{n}(\lambda P(k) + R(k))Q(k) = \lambda\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) + \sum_{k=0}^{n} R(k)Q(k)$$

   et idem pour la linéarité en le deuxième polynôme. Elle est symétrique car on peut échanger P et Q et on obtiendrait le même résultat. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\phi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P^2(k)$$

   Cette somme est positive, et nulle si et seulement si $P^2(k) = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$, et alors $P(k) = 0$. Ceci implique que P admet pour racines réelles les $(n+1)$ entiers $0, 1, 2, \ldots, n$. Or

P étant de degré inférieur ou égal à n, ceci est impossible sauf si P est le polynôme nul. Donc ϕ est bien définie positive.

Considérons la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $i, j \in \{0, \ldots, n\}$, alors

$$\phi(X^i, X^j) = \sum_{k=0}^{n} X^{i+j}(k) = \sum_{k=0}^{n} k^{i+j} > 0$$

donc la base canonique n'est pas orthogonale pour ce produit scalaire.

2. On vérifie que cette application est bien bilinéaire par linéarité de l'application trace, comme ci-dessus. Elle est symétrique de par la propriété que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tA)$ pour toute matrice carrée A, d'où

$$\psi(B, A) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tBA)) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on a alors

$$\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2$$

ce qui est strictement positif sauf si tous les $a_{i,j}$ sont nuls autrement dit si $A = 0$. D'où ψ est définie positive.

On considère la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par les matrices $E_{i,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, où $E_{i,j}$ est donnée par la matrice admettant un 1 en ligne i et colonne j, et des 0 partout ailleurs. On a par ailleurs ${}^tE_{i,j} = E_{j,i}$, et on vérifie que si $i \neq j$, alors $E_{j,i}E_{i,j} = 0$ et $E_{i,i}E_{i,i} = E_{i,i}$ d'où

$$\psi(E_{i,j}, E_{i,j}) = 0 \text{ et } \psi(E_{i,i}, E_{i,i}) = 1$$

(puisqu'on a un seul 1 qui apparaît sur la diagonale en ligne i et colonne i), donc la base canonique est orthogonale pour le produit scalaire ψ.

3. On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par

$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1 - t^2)\mathrm{d}t.$$

On vérifie que cette application est bien bilinéaire par linéarité de l'intégrale sur $[-1, 1]$, comme ci-dessus, et symétrique car on obtient le même résultat en échangeant les rôles de f et g. Soit $f \in \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$, alors

$$b(f, f) = \int_{-1}^{1} f^2(t)(1 - t^2)\mathrm{d}t$$

Or l'application $t \in [-1, 1] \mapsto f^2(t)(1 - t^2)$ est positive sur $[-1, 1]$, et identiquement nulle si et seulement si f est la fonction nulle sur $[-1, 1]$. Ainsi, par un argument similaire à la question (c) de l'Exercice 4, on obtient que b est définie positive, et c'est donc un produit scalaire.

Pour la question supplémentaire, qu'est ce que la base canonique de $\mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$? Cela n'a pas de sens ! L'espace vectoriel $\mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 6 (Cauchy-Schwarz) *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout* $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ *on a* $\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b - a)\int_a^b f(t)^2 dt$. *Préciser le cas d'égalité.*

Rappel (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$. Alors pour tous $x, y \in E$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|\phi(x, y)| \leq \sqrt{\phi(x, x)} \times \sqrt{\phi(y, y)}$$

De plus, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires, c'est à dire si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$.

Nous avons montré en question (c) de l'Exercice 4 que l'application $\beta : \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\beta(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire. On va appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire avec les fonctions $t \mapsto |f(t)|$ et la fonction constante égale à 1 : pour $f \in \mathcal{C}([a;b];\mathbb{R})$, on a

$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 = \left(\int_a^b |f(t)|\mathbf{1}(t)dt\right)^2$$

où $\mathbf{1} : [a,b] \to \mathbb{R}$ est la fonction constante égale à 1, et donc en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b |f(t)|\mathbf{1}(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b \mathbf{1}^2(t)dt\right)$$

or $\int_a^b \mathbf{1}^2(t)dt = \int_a^b 1dt = b-a$, d'où l'inégalité.

De plus, on a égalité si et seulement si f et $\mathbf{1}$ sont colinéaires, autrement dit si $|f(t)| = \lambda\mathbf{1}(t) = \lambda$ pour tout $t \in [a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, c'est à dire si f est constante puisque f est continue.

Exercice 7 (Cauchy-Schwarz) *Soient A et B deux matrices $n \times n$ symétriques. En choisissant un produit scalaire sur l'espace des matrices $n \times n$ montrer que $(tr(AB+BA))^2 \leq 4trA^2 \cdot trB^2$.*

L'énoncé suggère de considérer l'application $\phi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(A,B) = \mathrm{Tr}(AB+BA)$$

(où $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées de taille n symétriques). On vérifie que c'est bien une forme bilinéaire par linéarité de l'application trace, et elle est symétrique car $\phi(B,A) = \mathrm{Tr}(BA+AB) = \mathrm{Tr}(AB+BA)$. De plus, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\phi(A,A) = \mathrm{Tr}(2A^2) = 2\mathrm{Tr}(A^2) = 2\mathrm{Tr}({}^tAA)$$

où on obtient la dernière égalité puisque A est symétrique. Or, puisqu'on sait que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire (cf question 2 Exercice 5), on en déduit de même que ϕ est définie positive, et est donc un produit scalaire. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors

$$\mathrm{Tr}(AB+BA)^2 \leq \mathrm{Tr}(2A^2)\mathrm{Tr}(2B^2) = 4\mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^2).$$

Exercice 8 (Caractérisation d'un produit scalaire)

1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire c'est à dire $||x|| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$.
   Montrons les trois formules dans l'ordre : pour $x, y \in E$, on va partir de l'expression avec les normes et arriver à l'expression $\langle x,y\rangle$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) &= \frac{1}{4}(\langle x+y,x+y\rangle - \langle x-y,x-y\rangle)\\ &= \frac{1}{4}(\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle - (\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle))\\ &= \frac{1}{4}(2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle) = \frac{1}{4} \times 4\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

   puisque $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire, donc est symétrique.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) &= \frac{1}{2}(\langle x+y,x+y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle)\\ &= \frac{1}{2}(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\\ &= \langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2-\|x-y\|^2) &= \frac{1}{2}(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle-(\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle))\\
&= \langle x,y\rangle.
\end{aligned}$$

Pour l'identité du parallélogramme, on a pour $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle &= \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle\\
&= 2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).
\end{aligned}$$

2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout $(x,y)\in E^2$, on pose $\varphi(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$.*

   (a) Soit $x,y\in E$, on a

   $$\varphi(y,x)=\frac{1}{4}\left(\|y+x\|^2-\|y-x\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|-(x-y)\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=\varphi(x,y)$$

   puisque par propriété d'une norme, on a $\|-x\|=\|x\|$. De plus, $\varphi(x,x)=\frac{1}{4}\left(\|2x\|^2-\|x-x\|^2\right)=\frac{1}{4}(4\|x\|^2)=\|x\|^2$.

   (b) Ici, on ne peut utiliser que la définition de φ, et l'identité du parallélogramme, et pas le fait que $\|\cdot\|$ soit une norme issue d'un produit scalaire, d'où le fait qu'on ne puisse pas calculer avec les $\langle\cdot,\cdot\rangle$ comme en question 1, et qu'on doive utiliser l'indication. Soit $x,y\in E$, on a

   $$\|x+2y\|^2+\|x\|^2=\|(x+y)+y\|^2+\|(x+y)-y\|^2$$

   et on va alors utiliser l'identité du parallélogramme $\|x'+y'\|^2+\|x'-y'\|^2=2(\|x'\|^2+\|y'\|^2)$ avec $x'=x+y$ et $y'=y$. On obtient :

   $$\|x+2y\|^2+\|x\|^2=2(\|x+y\|^2+\|y\|^2)$$

   et idem en l'appliquant avec $x''=x-y$ et $y''=y$, on obtient

   $$\|x-2y\|^2+\|x\|^2=2(\|x-y\|^2+\|y\|^2)$$

   d'où

   $$\begin{aligned}
   \varphi(x,2y) &= \frac{1}{4}\left(\|x+2y\|^2-\|x-2y\|^2\right)\\
   &= \frac{1}{4}\left(2(\|x+y\|^2+\|y\|^2)-\|x^2\|-\left[2(\|x-y\|^2+\|y\|^2)-\|x\|^2\right]\right)\\
   &= 2\times\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=2\varphi(x,y).
   \end{aligned}$$

(c) Soient $x, y, z \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x,z) &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-z\|^2\right) = \frac{1}{8}(2\|x+z\|^2 - 2\|x-z\|^2) \\
&= \frac{1}{8}(2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - (2\|x-z\|^2 + 2\|y\|^2)) \\
&\underset{(*)}{=} \frac{1}{8}\left(\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - (\|x+y-z\|^2 + \|x-y-z\|^2)\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\left[\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right] + \left[\|x-y+z\|^2 - \|x-y-z\|^2\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\varphi(x+y,z) + \varphi(x-y,z)\right)
\end{aligned}$$

où $(*)$ utilise l'identité du parallélogramme sur les deux termes. On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x,z) + \varphi(y,z) &= \varphi(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z) + \varphi(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}) \\
&= 2\varphi(\frac{x+y}{2}, z) = \varphi(x+y,z)
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité utilise ce qu'on vient de montrer juste au-dessus, et la dernière égalité utilise le résultat de la question (b).

(d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$. Procédons par récurrence sur $\lambda \in \mathbb{N}$. Si $\lambda = 0$, on a 0 à droite, et $\varphi(0,y) = \frac{1}{4}\left(\|y\|^2 - \|-y\|^2\right) = 0$ à gauche.

Supposons que l'on ait montré l'égalité pour un certain $\lambda \in \mathbb{N}$, alors

$$\varphi((\lambda+1)x, y) = \varphi(\lambda x, y) + \varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y) = (\lambda+1)\varphi(x,y).$$

Étendons ce résultat :

— pour $\lambda \in \mathbb{Z}$: si λ est positif, c'est vrai. Supposons donc λ entier négatif, alors $-\lambda \in \mathbb{Z}$ et alors

$$\varphi(\lambda x, y) + \varphi(-\lambda x, y) = \varphi(0, y) = 0$$

et donc $\varphi(\lambda x) = -\varphi(-\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$ puisque $-\lambda \in \mathbb{N}$.

— pour $\lambda \in \mathbb{Q}$: soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\lambda = \frac{p}{q}$. Alors $\varphi(\lambda x, y) = \varphi(\frac{p}{q}x, y) = p\varphi(\frac{1}{q}x, y)$ puisque $p \in \mathbb{Z}$. Or on a :

$$\varphi(x,y) = \varphi(q \times \frac{1}{q}x, y) = q\varphi(\frac{1}{q}x, y)$$

et donc $\varphi(\frac{1}{q}x, y) = \frac{1}{q}\varphi(x,y)$ ce qui implique que $\varphi(\frac{p}{q}x, y) = \frac{p}{q}\varphi(x,y)$.

— pour $\lambda \in \mathbb{R}$: on sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers λ. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(\lambda_n x, y) = \lambda_n\varphi(x,y)$. On a alors

$$\varphi(\lambda x, y) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} \lambda_n x, y\right) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\lambda_n x, y) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \varphi(x,y) = \lambda\varphi(x,y).$$

On peut sortir le symbole limite de φ puisque l'application $\varphi(\cdot, y) : (E, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est continue en tant que somme des fonctions $x \in E \mapsto \frac{1}{4}\|x+y\|^2$ et $x \in E \mapsto -\frac{1}{4}\|x-y\|^2$ qui sont continues.

(e) Nous venons de montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme vérifiant l'identité du parallélogramme, alors l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

est bilinéaire, symétrique, et définie positive puisque $\varphi(x,x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 \geq 0$ et $\phi(x,x) = 0 \Rightarrow \|2x\|^2 = 0$ donc nécessairement $x = 0$ puisque $\|\cdot\|$ est une norme. Donc ϕ est un produit scalaire sur E. On a de plus $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$, donc $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire ϕ.

3. Nous venons de voir que pour que cette norme soit associée à un produit scalaire, il suffit de vérifier si elle vérifie l'identité du parallélogramme ou non. Soit $\|\cdot\|_1$ la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(x_1,x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Soient $x = (x_1,x_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Alors on a

$$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = (|x_1+y_1| + |x_2+y_2|)^2 + (|x_1-y_1| + |x_2-y_2|)^2$$

et

$$\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 = (|x_1| + |x_2|)^2 + (|y_1| + |y_2|)^2$$

Or il n'y a aucune raison pour que les deux quantités ci-dessus soient égales : par exemple si $x = (1,1)$ et $y = (-1,0)$, on a

$$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 1 + 9 \quad \text{et} \quad \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 = 4 + 1.$$

Donc $\|\cdot\|_1$ n'est pas associée à un produit scalaire.

Rappel : produits scalaires hermitiens. On considére un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$. On dit que φ est une forme hermitienne si :

— φ est linéaire selon la deuxième variable, c'est à dire pour tout $y \in E$, l'application $x \in E \mapsto \phi(x,y)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$.

— φ est *sesquilinéaire* selon la première variable, c'est à dire pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, x_1, x_2, y dans E alors
$$\varphi(\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda}\varphi(x_1,y) + \varphi(x_2,y).$$

— De plus, pour tous $x, y \in E$, on a $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

Un *produit scalaire* φ sur E est une forme hermitienne sur E satisfaisant en plus :

— φ est définie, c'est à dire
$$\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

— φ est positive, c'est à dire $\varphi(x,x) \geq 0$. Ceci a du sens puisque, comme $\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$, la quantité $\varphi(x,x)$ est réelle pour tout $x \in E$.

Exercice 9 (Produits scalaires complexes, les matrices)

1. Considérons l'application $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}\cdot B)$.

Pour le premier exemple, vérifions en détails que c'est une forme hermitienne. Soient $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ,$\mu \in \mathbb{C}$. On a :

$$\langle A, \mu B + B'\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}(\mu B + B')) = \mu\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B) + \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B'),$$

$$\langle \lambda A + A', B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t(\overline{\lambda A + A'}), B) = \mathrm{Tr}({}^t(\overline{\lambda A} + \overline{A'})), B) = \mathrm{Tr}((\overline{\lambda}{}^t\overline{A} + \overline{A'})B) = \overline{\lambda}\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B) + \mathrm{Tr}({}^t\overline{A'}B)$$

De plus, si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{i,j} = x_{i,j} + iy_{i,j}$, on a alors

$$\mathrm{Tr}(\overline{A}) = \sum_{i=1}^n \overline{a_{i,i}} = \sum_{i=1}^n x_{i,i} - iy_{i,i} = \left(\sum_{i=1}^n x_{i,i}\right) - i\left(\sum_{i=1}^n y_{i,i}\right) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}.$$

On a alors par conséquent

$$\mathrm{Tr}({}^t\overline{B}A) \underset{(1)}{=} \mathrm{Tr}(\overline{{}^tB\overline{A}}) = \overline{\mathrm{Tr}({}^tB\overline{A})} \underset{(2)}{=} \overline{\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B)}$$

où (1) utilise le fait que $\overline{\overline{A}} = A$, donc ${}^t\overline{B}A = \overline{{}^tB\overline{A}}$ et (2) utilise le fait que la trace est invariante en prenant la transposée, et ${}^t({}^tB\overline{A}) = {}^t\overline{A}B$.

2. Considérons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors ${}^t\overline{A} = (a'_{i,j})$ où pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a $a'_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$. Notons $C = (c_{i,j})$ la matrice ${}^t\overline{A}B$, alors pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$c_{i,j} = \sum_{1\leq k\leq n} a'_{i,k} b_{k,j} = \sum_{1\leq k\leq n} \overline{a_{k,i}} b_{k,j}$$

d'où

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A}B) = \sum_{1\leq i\leq n} c_{i,i} = \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq k\leq n} \overline{a_{k,i}} \cdot b_{k,i}$$

Exercice 10 (Produits scalaires complexes, les polynômes) Soit $\varphi : \mathbb{C}[X]^2 \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

Rappelons tout d'abord que pour calculer l'intégrale sur un intervalle de $\mathbb{R}$ d'une fonction à valeurs complexes f, on décompose $f(t)$ en sa partie réelle et sa partie imaginaire, et on calcule ensuite l'intégrale des deux parties, autrement dit :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\mathrm{d}t$$

On observe alors que pour toute fonction f continue, on a

$$\int_a^b \overline{f(t)}\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$$

1. Considérons des polynômes P,P',Q et Q' de $\mathbb{C}[X]$, et λ, μ des scalaires de $\mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(P, \mu Q + Q') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} (\mu Q + Q')(e^{it}) dt \\ &= \mu \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q'(e^{it}) dt = \mu\varphi(P, Q) + \varphi(P, Q').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + P', Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{(\lambda P + P')(e^{it})} Q(e^{it}) dt \\ &= \overline{\lambda} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P'(e^{it})} Q(e^{it}) dt = \overline{\lambda}\varphi(P, Q) + \varphi(P', Q)\end{aligned}$$

d'où la sesquilinéarité, et

$$\varphi(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(e^{it})} P(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(e^{it}) \overline{P(e^{it})}} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q(e^{it}) \overline{P(e^{it})} dt} = \overline{\varphi(P, Q)}.$$

De plus, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\varphi(P, P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} P(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |P(e^{it})|^2 dt$$

ce qui est l'intégrale d'une fonction réelle, positive sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, donc elle est positive et nulle si et seulement si la fonction est identiquement nulle, c'est à dire $P(e^{it}) = 0$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, ce qui implique $P = 0$ autrement il admettrait une infinité de racines. Donc φ est définie positive.

2. La base canonique de $\mathbb{C}[X]$ est donné par $(1, X, X^2, \dots)$, autrement dit tous les X^n pour $n \in \mathbb{N}$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(X^n, X^m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{(e^{it})^n}(e^{it})^m dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}e^{imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}dt$$

Ainsi, si $m = n$, on obtient $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1dt = 1$, et si $m \neq m$, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)t}dt = \left[-\frac{i}{m-n}e^{i(m-n)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{i}{m-n}\left[(-1)^{m-n} - (-1)^{n-m}\right] = 0$$

car $m-n$ et $n-m$ ont la même parité, donc $(-1)^{m-n} = (-1)^{n-m}$. Donc la base canonique est bien orthonormée.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

3. Considérons $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On a alors

$$\|Q\|^2 = \varphi(Q, Q) = \varphi(a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n, a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n)$$

On pourrait tout développer ici, mais on peut avancer un peu plus vite. En effet, on a montré à la question précédente que si $i \neq j$, alors $\varphi(X^i, X^j) = 0$, donc quand on va développer tous les termes croisés vont donner 0, et il ne va rester que

$$\begin{aligned}\|Q\|^2 &= \varphi(a_0, a_0) + \varphi(a_1X, a_1X) + \cdots + \varphi(a_{n-1}X^{n-1}, a_{n-1}X^{n-1}) + \varphi(X^n, X^n)\\ &= |a_0|^2\varphi(1,1) + |a_1|^2\varphi(X, X) + \cdots + |a_{n-1}|^2\varphi(X^{n-1}, X^{n-1}) + \varphi(X^n, X^n)\\ &= |a_0^2| + |a_1|^2 + \cdots + |a_{n-1}|^2 + 1\end{aligned}$$

puisque $\varphi(X^i, X^i) = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et, par exemple, $\varphi(a_0, a_0) = \overline{a_0}\varphi(1, a_0) = \overline{a_0}a_0\varphi(1,1) = |a_0|^2$.

4. Soit $M = \sup\{|Q(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. On a alors $|Q(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. D'où on en déduit :

$$\|Q\|^2 = \varphi(Q, Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{Q(e^{it})}Q(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Q(e^{it})|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M^2 dt = M^2$$

Or nous avons montré á la question précédente que le terme de gauche vaut $|a_0^2| + |a_1|^2 + \cdots + |a_{n-1}|^2 + 1$, d'où l'inégalité

$$|a_0^2| + |a_1|^2 + \cdots + |a_{n-1}|^2 + 1 \leq M^2$$

qui implique que $M \geq 1$ (puisque M est positif ou nul en tant que borne supérieure d'un ensemble d'élements de $\mathbb{R}^+$).

Par ailleurs, si $Q = X^n$, on a $|Q(z)| = |z^n| = |z|^n = 1$ donc $M = 1$. Réciproquement, si $M = 1$, alors l'inégalité ci-dessus est une égalité, ce qui implique puisque tous les $|a_i|^2$ sont positifs que $|a_0| = |a_1| = \cdots = |a_{n-1}| = 0$ et donc $Q = X^n$.

Exercice 11 (Des complexes aux réels) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \mathrm{Re}(\langle x, y \rangle)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant un produit scalaire, il vérifie les bonnes propriétés, c'est à dire linéarité à droite et sesquilinéarité à gauche. Soient $x, x', y, y' \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (on prend $\mathbb{R}$ car on veut étudier φ sur E en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel). On a alors

$$\varphi(\lambda x + x', y) = \mathrm{Re}(\langle \lambda x + x', y \rangle) \underset{(1)}{=} \mathrm{Re}(\lambda\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle) = \lambda\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle) + \mathrm{Re}(\langle x', y \rangle) = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

où l'égalité (1) utilise que λ est réel, donc $\lambda = \overline{\lambda}$. On procède de même pour la linéarité par rapport à la deuxième variable. Pour la symétrie, on a

$$\varphi(y,x) = \mathrm{Re}(\langle y,x\rangle) = \mathrm{Re}(\overline{\langle x,y\rangle}) = \mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$$

où la deuxième inégalité utilise que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien, et la troisième utilise que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Il reste à montrer que φ est définie positive : soit $x \in E$, alors $\varphi(x,x) = \mathrm{Re}(\langle x,x\rangle) = \langle x,x\rangle$ puisque $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}$, et donc cette quantité est positive, et vaut 0 si et seulement si $x = 0$ puisque $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire hermitien.

Exercice 12 (Produit scalaire, bases) Soient $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$, $A = \mathrm{Diag}(a_1,\dots,a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ l'application bilinéaire définie par $\varphi(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(X,X) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_2 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix} \\ &= a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2\end{aligned}$$

   Montrons que l'application est définie positive si $a_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Si tous les a_i sont strictement positifs, on a bien $\varphi(X,X) \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'après le calcul précédent, et c'est nul si et seulement si tous les termes $a_kx_k^2$ sont nuls (puisqu'on ajoute des termes positifs), c'est à dire si tous les x_k sont nuls, *i.e.* $X = 0$. Réciproquement, supposons qu'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_j \leq 0$. Alors pour $X = E_{j,1}$ le vecteur admettant un 1 en $j$ème ligne et des 0 ailleurs, on a $\varphi(X,X) = a_i \geq 0$. Donc la forme n'est pas positive. Ainsi, pour qu'elle soit définie positive, nous venons de montrer par l'absurde qu'il faut que tous les a_i soient > 0.

2. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donnée par les vecteurs $Ej,1$ comme ci-dessus, pour $1 \leq j \leq n$. Donc si on écrit $E_{j,1} = \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}$, on a $x_{j,i} = 0$ si $i \neq j$ et $x_{j,j} = 1$. Par ailleurs, on obtient que si $j \neq k$:

$$\begin{aligned}\varphi(E_{j,1},E_{k,1}) &= \begin{pmatrix} x_{j,1} & x_{j,2} & \dots & x_{j,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1x_{k,1} \\ a_2x_{k,2} \\ \vdots \\ a_nx_{k,n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_ix_{j,i}x_{k,i} = 0\end{aligned}$$

   puisque $x_{j,i} \neq 0$ si et seulement si $i = j$, mais on a alors $x_{k,i} = 0$ puisque $i = j \neq k$ et donc tous les termes de la somme sont nuls.

3. La base ci-dessus est orthogonale, mais elle n'est pas orthonormée. En effet, un calcul similaire à la question précédente montre que

$$\varphi(E_{j,1},E_{j,1}) = \sum_{i=1}^n a_ix_{j,i}x_{j,i} = a_j$$

Donc pour obtenir une base orthonormée, il suffit de 'renormer' les vecteurs $E_{j,1}$ en posant

$$F_j = \frac{1}{\sqrt{a_j}} E_{j,1}$$

ce qui est bien défini puisqu'on a supposé que $a_j > 0$. En effet, on a alors

$$\varphi(F_j, F_j) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{a_j}} E_{j,1}, \frac{1}{\sqrt{a_j}} E_{j,1}\right) = \frac{1}{a_j}\varphi(E_{j,1}, E_{j,1}) = \frac{1}{a_j} a_j = 1.$$

La base $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ est toujours orthogonale (on ne modifie pas que les produits scalaires croisés sont 0 en multipliant par des scalaires), et tous ses vecteurs sont de norme 1.

Exercice 13 (Familles indépendantes infinies) On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel : $\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi n t)$.

1. Soit $n, m \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(h_n, h_m) &= \int_0^1 \cos(2\pi n t)\cos(2\pi m t)dt \\ &= \int_0^1 \cos(2\pi(n+m)t) + \cos(2\pi(n-m)t)dt\end{aligned}$$

en utilisant l'identité de trigonométrie $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi(h_n, h_m) &= \left[\frac{1}{2\pi(n+m)}\sin(2\pi(n+m)t)\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2\pi(n-m)}\sin(2\pi(n-m)t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2\pi(n+m)}\sin(2\pi n + 2\pi m) + \frac{1}{2\pi(n-m)}\sin(2\pi n - 2\pi m) \\ &= \frac{1}{2\pi(n+m)}\sin(0) + \frac{1}{2\pi(n-m)}\sin(0) = 0\end{aligned}$$

car sin est 2π-périodique. Donc la famille (h_n) est orthogonale.

2. Supposons que E est de dimension finie, notée $n \in \mathbb{N}$. Nous venons de trouver une famille infinie $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications qui sont orthogonales. Or, ces applications étant orthogonales, elles forment une famille libre : en effet, supposons que l'on ait une combinaison linéaire

$$\lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n + \cdots = 0$$

et montrons que tous les λ_i sont nécessairement égaux à 0.
Soit $j \in \mathbb{N}$: on a d'une part $\varphi(h_j, \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n + \ldots) = \varphi(h_j, 0) = 0$ par hypothèse. D'autre part, en utilisant la bilinéarité, on obtient que

$$\varphi(h_j, \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n + \ldots) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \varphi(h_j, h_i) = \lambda_j \varphi(h_j, h_j)$$

en utilisant l'orthogonalité que l'on vient de montrer. Donc on en déduit que $\lambda_j \varphi(h_j, h_j) = 0$ en combinant ces deux égalités. Mais, φ étant définie positive et h_j n'étant pas la fonction nulle, on a $\varphi(h_j, h_j) > 0$ et donc on obtient $\lambda_j = 0$. Ceci étant vrai pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a bien montré que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. On a donc une famille libre contenant une infinité d'éléments dans un espace vectoriel de dimension finie n : ceci est impossible, et donc E est de dimension infinie.