# Calculs de bases dans des 2-catégories linéaires par réécriture.

Benjamin Dupont

Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes

Séminaire AGATA, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

9 Septembre 2021

## Outline

# I. Introduction et motivations

# Réécriture et calcul de bases

- **Question principale :** Etant donnée une présentation d'une algèbre (ou catégorie linéaire) par générateurs et relations, comment connaître sa taille ?
  - En général, il est possible de trouver un **ensemble générateur** de l'algèbre.
  - Prouver **l'indépendance linéaire** est difficile.

## Réécriture et calcul de bases

- **Question principale :** Etant donnée une présentation d'une algèbre (ou catégorie linéaire) par générateurs et relations, comment connaître sa taille ?
  - En général, il est possible de trouver un **ensemble générateur** de l'algèbre.
  - Prouver **l'indépendance linéaire** est difficile.
- **Objectif :** Développer des outils adaptés au calcul de bases linéaires d'algèbres diagrammatiques.
  - **Applications :** preuves de résultats de catégorification, en montrant que les HOM-sets des catégories candidates admettent des bases explicites.
  - **Exemple :** catégorification de groupes quantiques $U_q(\mathfrak{g})$ avec la $2$-catégorie KLR **[Khovanov-Lauda '08]**, **[Rouquier '08]**.
  - Plusieurs présentations diagrammatiques où le calcul de bases est difficile: catégorifications de Heisenberg, catégorie des bimodules de Soergel, etc.

# Réécriture et calcul de bases

- **Question principale :** Etant donnée une présentation d'une algèbre (ou catégorie linéaire) par générateurs et relations, comment connaître sa taille ?
  - En général, il est possible de trouver un **ensemble générateur** de l'algèbre.
  - Prouver **l'indépendance linéaire** est difficile.
- **Objectif :** Développer des outils adaptés au calcul de bases linéaires d'algèbres diagrammatiques.
  - **Applications :** preuves de résultats de catégorification, en montrant que les HOM-sets des catégories candidates admettent des bases explicites.
  - **Exemple :** catégorification de groupes quantiques $U_q(\mathfrak{g})$ avec la $2$-catégorie KLR **[Khovanov-Lauda '08]**, **[Rouquier '08]**.
  - Plusieurs présentations diagrammatiques où le calcul de bases est difficile: catégorifications de Heisenberg, catégorie des bimodules de Soergel, etc.
- **Réécriture algébrique** : modèle de calcul pour des structures algébriques présentées par générateurs et relations orientées.
- Diverses approches de réécriture dans des structures linéaires:
  - algèbres associatives **[Bergman, Bökut]**,
  - algèbres commutatives **[Gröbner, Buchberger]**,
  - algèbres de Lie **[Shirshov]**,
  - algèbres non-commutatives **[Mora]**,
  - opérades **[Dotsenko-Koroshkin]**,
  - algèbres de dimension supérieure **[Guiraud-Hoffbeck-Malbos]**, etc.

# Réécriture et calcul de bases

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x, \ y\}$ et relations $R = \{x^2 = xy\}$.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x, \ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$yxxxy$$

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x, y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$\begin{array}{ccc} & & yxxxy \\ & \swarrow & \\ yxyxy & & \end{array}$$

# Réécriture et calcul de bases

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & yxxxy \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ yxyxy & & yxxyy \end{tikzcd}$$

# Réécriture et calcul de bases

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & yxxxy \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\text{Branchement local}"] & \\
yxyxy & & yxxyx
\end{tikzcd}
$$

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{y}xxx\mathbf{y} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\text{Branchement local}"] & \\
\mathbf{y}xyx\mathbf{y} & & \mathbf{y}xxy\mathbf{y}
\end{tikzcd}$$

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & xxx \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xyx & \textbf{Branchement critique} & xxy \end{tikzcd}$$

# Réécriture et calcul de bases

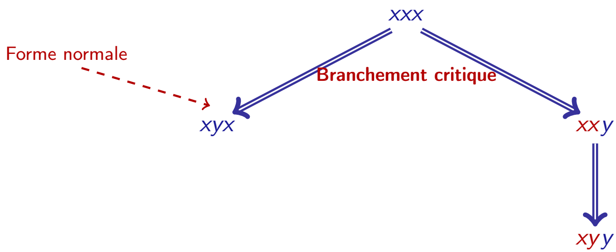
- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & xxx \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
xyx & \text{Branchement critique} & {}
\end{tikzcd}
$$

Forme normale

## Réécriture et calcul de bases

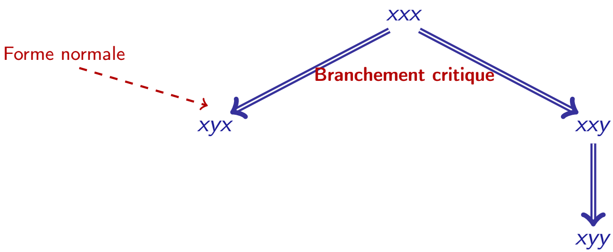
- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x, y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.



- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Forme normale} \arrow[dr, dashed] & & xxx \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& xyx & \text{Branchement critique} & xxy \arrow[d, Rightarrow] & \\
& & & xyy &
\end{tikzcd}
$$

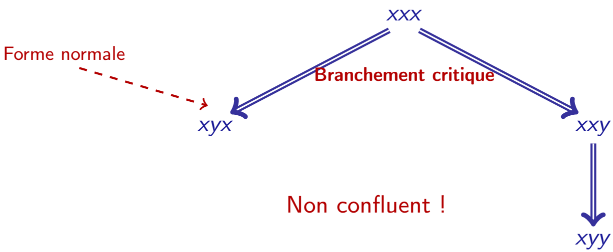
- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.




- Le système de réécriture associé est **terminant**, *i.e.* n'admet pas de suite infinie de réécriture (ordre deglex sur $x > y$).

## Réécriture et calcul de bases

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.




- Le système de réécriture associé est **terminant**, *i.e.* n'admet pas de suite infinie de réécriture (ordre deglex sur $x > y$).

- Les monômes en forme normale **engendrent** l'algèbre. Ils ne sont pas linéairement indépendants: la propriété manquante est la **confluence**.

## Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

## Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X, \ \alpha_i \in \mathbb{N}\right\}$$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X, \ \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $yx \Rightarrow xy + [y,x]$, où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$zyx$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X, \ \alpha_i \in \mathbb{N}\right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \dots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$zyx \Rightarrow yzx - [z,y]x$$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \dots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & yzx - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & yxz - y[z,x] - [z,y]x \\ zyx \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{N}\right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \dots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$zyx \Longrightarrow yzx - [z,y]x \Longrightarrow yxz - y[z,x] - [z,y]x \Longrightarrow xyz - [y,x]z - y[z,x] - [z,y]x$$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X, \ \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$\begin{tikzcd}
 & yzx - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & yxz - y[z,x] - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & xyz - [y,x]z - y[z,x] - [z,y]x \\
zyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & zxy - z[y,x] & &
\end{tikzcd}$$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X, \; \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $yx \Rightarrow xy + [y,x]$, où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & yzx - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & yxz - y[z,x] - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & xyz - [y,x]z - y[z,x] - [z,y]x \\
zyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & zxy - z[y,x] \arrow[r, Rightarrow] & xzy - [z,x]y - z[y,x] &
\end{tikzcd}$$

# Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{ x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k} \;\middle|\; \quad x_i < x_{i+1} \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{N} \right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$zyx \Rightarrow yzx - [z,y]x \Longrightarrow yxz - y[z,x] - [z,y]x \Longrightarrow xyz - [y,x]z - y[z,x] - [z,y]x$$

$$zyx \Rightarrow zxy - z[y,x] \Longrightarrow x\textcolor{red}{zy} - [z,x]y - z[y,x] \Longrightarrow xyz - x[z,y], [z,x]y - z[y,x]$$

## Confluence et le lemme du diamant de Bergman

- **Résultat fondamental :** Si un système de réécriture linéaire termine, sa confluence est équivalente à la confluence de ses branchements critiques.

- **Théorème [Lemme du diamant de Bergman] :** Si les relations sont orientées relativement à un ordre monomial, les monômes irréductibles forment une base de l'algèbre ssi les branchements critiques sont confluents.

- **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt :** Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie $X$ une base totalement ordonnée de $\mathcal{L}$. Alors l'algèbre enveloppante $U(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ admet une base formée de

$$\left\{x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k} \mid \quad x_i < x_{i+1} \in X,\ \alpha_i \in \mathbb{N}\right\}$$

  - présentation de $U(\mathcal{L})$: $\quad \{X \mid yx - xy - [y,x], \quad x \neq y \in X\}$
  - choix d'orientation des relations : $\quad yx \Rightarrow xy + [y,x], \quad$ où $x < y$
  - le système associé termine, avec un order deglex sur $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,
  - les branchements critiques sont sur des mots de la forme $zyx$ pour $x < y < z$, leur confluence est équivalente à l'identité de Jacobi :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & yzx - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & yxz - y[z,x] - [z,y]x \arrow[r, Rightarrow] & xyz - [y,x]z - y[z,x] - [z,y]x \\
zyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & zxy - z[y,x] \arrow[r, Rightarrow] & xzy - [z,x]y - z[y,x] \arrow[r, Rightarrow] & xyz - x[z,y], [z,x]y - z[y,x]
\end{tikzcd}$$

  - une base de $U(\mathcal{L})$ est composée des monômes en forme normale : $\quad x_1^{\alpha_1}\dots x_k^{\alpha_k}$ tels que $x_i < x_{i+1}$.

## Polygraphes linéaires

- Les **polygraphes** sont des présentations par générateurs et relations orientées de catégories (globulaires, strictes) de dimension supérieure **[Burroni '93]**, **[Street '76]**.

# Polygraphes linéaires

- Les **polygraphes** sont des présentations par générateurs et relations orientées de catégories (globulaires, strictes) de dimension supérieure **[Burroni '93]**, **[Street '76]**.
- **[Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : **polygraphes linéaires** pour présenter des algèbres de dimension supérieure.
  - La compatibilité des règles relativement à un ordre monomial est remplacée par une hypothèse de terminaison.

# Polygraphes linéaires

- Les **polygraphes** sont des présentations par générateurs et relations orientées de catégories (globulaires, strictes) de dimension supérieure **[Burroni '93]**, **[Street '76]**.

- **[Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : **polygraphes linéaires** pour présenter des algèbres de dimension supérieure.

  - La compatibilité des règles relativement à un ordre monomial est remplacée par une hypothèse de terminaison.

- **Théorème [Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : Soit $P$ un $2$-polygraphe linéaire terminant et monomial à gauche. Les assertions suivantes sont équivalentes:

  **i)** $P$ est confluent.

  **ii)** L'espace vectoriel $P_1^\ell := \mathbb{K}[P_1^*]$ admet la décomposition en somme directe
  $$P_1^\ell = P_1^{\mathrm{nf}} \oplus I(P)$$
  où $P_1^{\mathrm{nf}}$ est l'ensemble des monômes en forme normale pour $P_1$, et $I(P)$ est l'idéal bilatère engendré par $\{s_1(\alpha) - t_1(\alpha) \mid \alpha \in P_2\}$.

# Polygraphes linéaires

- Les **polygraphes** sont des présentations par générateurs et relations orientées de catégories (globulaires, strictes) de dimension supérieure **[Burroni '93]**, **[Street '76]**.

- **[Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : **polygraphes linéaires** pour présenter des algèbres de dimension supérieure.

  - La compatibilité des règles relativement à un ordre monomial est remplacée par une hypothèse de terminaison.

- **Théorème [Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : Soit $P$ un $2$-polygraphe linéaire terminant et monomial à gauche. Les assertions suivantes sont équivalentes:

  **i)** $P$ est confluent.

  **ii)** L'espace vectoriel $P_1^\ell := \mathbb{K}[P_1^*]$ admet la décomposition en somme directe
$$P_1^\ell = P_1^{\mathrm{nf}} \oplus I(P)$$
  où $P_1^{\mathrm{nf}}$ est l'ensemble des monômes en forme normale pour $P_1$, et $I(P)$ est l'idéal bilatère engendré par $\{s_1(\alpha) - t_1(\alpha) \mid \alpha \in P_2\}$.

- **Exemple :**

$$\begin{tikzcd} & xyx & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & \\ & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd} \qquad xyx - xyy \in I(P) \cap \mathrm{NF}(P).$$

- Les **polygraphes** sont des présentations par générateurs et relations orientées de catégories (globulaires, strictes) de dimension supérieure **[Burroni '93]**, **[Street '76]**.
- **[Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : **polygraphes linéaires** pour présenter des algèbres de dimension supérieure.
  - La compatibilité des règles relativement à un ordre monomial est remplacée par une hypothèse de terminaison.
- **Théorème [Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : Soit $P$ un $2$-polygraphe linéaire terminant et monomial à gauche. Les assertions suivantes sont équivalentes:

  **i)** $P$ est confluent.

  **ii)** L'espace vectoriel $P_1^{\ell} := \mathbb{K}[P_1^*]$ admet la décomposition en somme directe

$$P_1^{\ell} = P_1^{\mathrm{nf}} \oplus I(P)$$

  où $P_1^{\mathrm{nf}}$ est l'ensemble des monômes en forme normale pour $P_1$, et $I(P)$ est l'idéal bilatère engendré par $\{s_1(\alpha) - t_1(\alpha) \mid \alpha \in P_2\}$.

- **Exemple :**

$$\begin{tikzcd} & xyx & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & \\ & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd} \qquad xyx - xyy \in I(P) \cap \mathrm{NF}(P).$$

- **[Alleaume '16]** a étendu le résultat ci-dessus pour des catégories linéaires de dimension supérieure.

# Polygraphes linéaires

- Les **polygraphes** sont des présentations par générateurs et relations orientées de catégories (globulaires, strictes) de dimension supérieure **[Burroni '93]**, **[Street '76]**.

- **[Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : **polygraphes linéaires** pour présenter des algèbres de dimension supérieure.

  - La compatibilité des règles relativement à un ordre monomial est remplacée par une hypothèse de terminaison.

- **Théorème [Guiraud-Hoffbeck-Malbos '19]** : Soit $P$ un $2$-polygraphe linéaire terminant et monomial à gauche. Les assertions suivantes sont équivalentes:

  **i)** $P$ est confluent.

  **ii)** L'espace vectoriel $P_1^\ell := \mathbb{K}[P_1^*]$ admet la décomposition en somme directe
  $$P_1^\ell = P_1^{\mathrm{nf}} \oplus I(P)$$
  où $P_1^{\mathrm{nf}}$ est l'ensemble des monômes en forme normale pour $P_1$, et $I(P)$ est l'idéal bilatère engendré par $\{s_1(\alpha) - t_1(\alpha) \mid \alpha \in P_2\}$.

- **Exemple :**

$$\begin{tikzcd} & xyx & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & \\ & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd} \qquad xyx - xyy \in I(P) \cap \mathrm{NF}(P).$$

- **[Alleaume '16]** a étendu le résultat ci-dessus pour des catégories linéaires de dimension supérieure.

- En général, on cherche à obtenir des présentations **convergentes**, *i.e.* terminantes et confluentes.

  - D'abord, prouver la terminaison.

  - Ensuite, étude exhaustive des branchements critiques.

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[dr, Rightarrow, bend right] & & \\ & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x, y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd}
 & xyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\
xxx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy
\end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd}
 & xyyx & \\
xxyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy
\end{tikzcd}$$

## Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd}
 & xyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\
xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy
\end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd}
 & xyyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\
xxyx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy
\end{tikzcd}$$

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd} & xyyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\ xxyx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy \end{tikzcd}$$

- Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y,\ z\}$ et relations $R = \{yz \overset{\alpha}{\Rightarrow} zx,\ xy \overset{\beta}{\Rightarrow} z\}$.

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd} & xyyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xxyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy \end{tikzcd}$$

- Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y,\ z\}$ et relations $R = \{yz \overset{\alpha}{\Rightarrow} zx,\ xy \overset{\beta}{\Rightarrow} z\}$.

$$\begin{tikzcd} & zz \\ xyz \arrow[ur, Rightarrow, "\beta z"] \arrow[dr, Rightarrow, "x\alpha"'] & \\ & xzx \end{tikzcd}$$

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx \arrow[ddr, Rightarrow] & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd} & xyyx \arrow[ddr, Rightarrow] & \\ xxyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy \end{tikzcd}$$

- Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y,\ z\}$ et relations $R = \{yz \overset{\alpha}{\Rightarrow} zx,\ xy \overset{\beta}{\Rightarrow} z\}$.

$$\begin{tikzcd} & zz \\ xyz \arrow[ur, Rightarrow, "\beta z"] \arrow[dr, Rightarrow, "x\alpha"'] & \\ & xzx \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd}
 & xyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\
xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy
\end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd}
 & xyyx \arrow[dr, Rightarrow, bend left] & \\
xxyx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy
\end{tikzcd}$$

- Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y,\ z\}$ et relations $R = \{yz \overset{\alpha}{\Rightarrow} zx,\ xy \overset{\beta}{\Rightarrow} z\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & zz \\
xyz \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta z"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "x\alpha"'] & \\
 & xzx \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & zzy \\
xzxy \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma y"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "xz\beta"'] & \\
 & xzz
\end{tikzcd}$$

# Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd} & xyyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xxyx \arrow[ur, Rightarrow, bend left] \arrow[r, Rightarrow, bend right] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy \end{tikzcd}$$

- Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y,\ z\}$ et relations $R = \{yz \overset{\alpha}{\Rightarrow} zx,\ xy \overset{\beta}{\Rightarrow} z\}$.

$$\begin{tikzcd} & zz \\ xyz \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\beta z"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "x\alpha"'] & \\ & xzx \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & zzy \\ xzxy \arrow[ur, Rightarrow, bend left, "\gamma y"] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "xz\beta"'] & \\ & xzz \arrow[uu, Rightarrow, bend right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

## Complétion de Knuth-Bendix

- À partir d'une présentation **non confluente** équipée avec un ordre de terminaison $<$, on peut ajouter des règles pour tenter de la rendre confluente.

- **Exemple :** Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y\}$ et relations $R = \{x^2 \Rightarrow xy\}$.

  - Un branchement critique :

$$\begin{tikzcd} & xyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xxx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & xxy \arrow[r, Rightarrow] & xyy \end{tikzcd}$$

  - Nouveaux branchements critiques sur $xxyx$ et $xyxx$:

$$\begin{tikzcd} & xyyx \arrow[dr, Rightarrow] & \\ xxyx \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & xxyy \arrow[r, Rightarrow] & xyyy \end{tikzcd}$$

- Algèbre associative $A$ présentée par générateurs $X = \{x,\ y,\ z\}$ et relations $R = \{yz \overset{\alpha}{\Rightarrow} zx,\ xy \overset{\beta}{\Rightarrow} z\}$.

$$\begin{tikzcd} & zz \\ xyz \arrow[ur, Rightarrow, "\beta z"] \arrow[dr, Rightarrow, "x\alpha"'] & \\ & xzx \arrow[uu, Rightarrow, "\gamma"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & zzy \\ xzxy \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma y"] \arrow[dr, Rightarrow, "xz\beta"'] & \\ & xzz \arrow[uu, Rightarrow, "\delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & zzzx & \\ xzxzx \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma zx"] \arrow[dr, Rightarrow, "xz\gamma"'] & & zzyz \arrow[ul, Rightarrow, "zz\alpha"'] \\ & xzzz \arrow[ur, Rightarrow, "\delta z"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & zzzz & zzzxy \arrow[l, Rightarrow, "zzz\beta"'] \\ xzxzz \arrow[ur, Rightarrow, "\gamma zz"] \arrow[dr, Rightarrow, "xz\delta"'] & & \\ & xzzzy \arrow[r, Rightarrow, "\delta xy"'] & zzyzy \arrow[uu, Rightarrow, "zz\alpha y"'] \end{tikzcd}$$

# II. Réécriture dans des $2$-categories linéaires

## Algèbres diagrammatiques

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.
- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;
  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

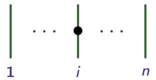
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

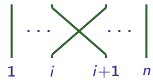
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$

# Algèbres diagrammatiques

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

    $x_i =$ 

    , $\tau_i =$ 


  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

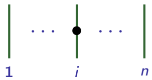
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

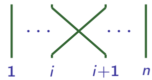
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$

# Algèbres diagrammatiques

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

$x_i =$ 

, $\tau_i =$ 


  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

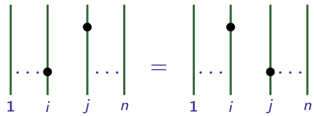
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

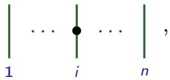
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$

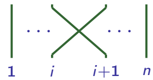


## Algèbres diagrammatiques

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

$x_i =$ 

, $\tau_i =$ 


  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

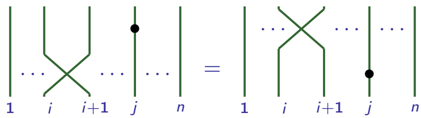
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

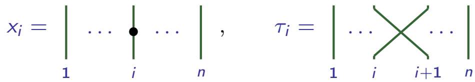
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$



# Algèbres diagrammatiques

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;




  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

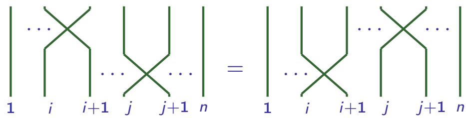
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

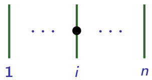
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

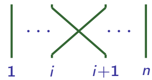
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$



- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

$x_i =$ 

, $\tau_i =$ 


  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

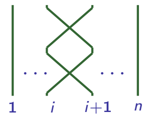
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

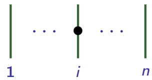
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$

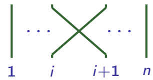


$= 0$

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

$x_i =$ 

, $\tau_i =$ 


  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i - j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

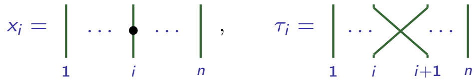
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$

$= 0$

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;




  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

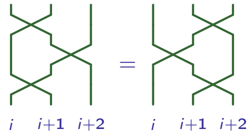
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

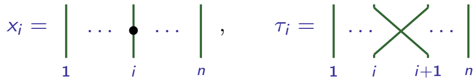
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$



- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;




  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$

$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

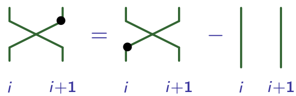
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$

$$\tau_i^2 = 0$$

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$

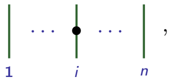
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$

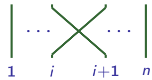
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$



- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

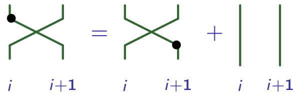
- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

$x_i =$ 

, $\tau_i =$ 


  - relations :

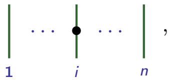
$$x_i x_j = x_j x_i$$
$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\tau_i^2 = 0$$
$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$

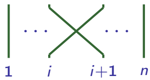


## Algèbres diagrammatiques

- **Algèbre diagrammatique :** algèbre ou catégorie monoïdale linéaire présentée par générateurs et relations représentés par des diagrammes.

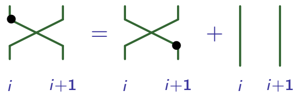
- **Exemple** : Pour $n \in \mathbb{N}$, l'algèbre nil Hecke $\mathcal{NH}_n$ de degré $n$ est présentée par
  - générateurs $x_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et $\tau_i$ pour $1 \leq i < n$;

$x_i =$ 

, $\tau_i =$ 


  - relations :

$$x_i x_j = x_j x_i$$
$$\tau_i x_j = x_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i \quad \text{si } |i-j| > 1$$
$$\tau_i^2 = 0$$
$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$$
$$x_i \tau_i - \tau_i x_{i+1} = 1$$
$$\tau_i x_i - x_{i+1} \tau_i = 1$$




- On étudie ces algèbres de manière économique en les réalisant comme des 2-HOM-sets de 2-catégories linéaires.

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.

# 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.
  - une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour chaque espace de morphismes $\mathcal{A}(A, B)$.

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.
  - une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour chaque espace de morphismes $\mathcal{A}(A, B)$.
  - la composition et le produit tensoriel de morphismes sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.
  - une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour chaque espace de morphismes $\mathcal{A}(A, B)$.
  - la composition et le produit tensoriel de morphismes sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.
- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
  - pour tous $p$, $q$ dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.
  - une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour chaque espace de morphismes $\mathcal{A}(A, B)$.
  - la composition et le produit tensoriel de morphismes sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
  - pour tous $p$, $q$ dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - $\star_0$ et $\star_1$-composition de 1-cellules sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left=50, "v"] \arrow[r, bend right=50, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u\star_0 v"] \arrow[r, bend right=50, "u'\star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f\star_0 g"] & z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=70, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=70, "w"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow g"] & y
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f\star_1 g"] & y
\end{tikzcd}
$$

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.
  - une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour chaque espace de morphismes $\mathcal{A}(A, B)$.
  - la composition et le produit tensoriel de morphismes sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

- Une 2-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée d'une 2-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
  - pour tous $p$, $q$ dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - $\star_0$ et $\star_1$-composition de 1-cellules sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left=50, "v"] \arrow[r, bend right=50, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow"] & x \arrow[r, bend left=50, "u \star_0 v"] \arrow[r, bend right=50, "u' \star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=70, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=70, "w"'] \arrow[r, phantom, bend left=35, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, bend right=35, "\Downarrow g"] & y \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow"] & x \arrow[r, bend left=50, "u"] \arrow[r, bend right=50, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & y
\end{tikzcd}$$

- Lorsque $\mathcal{C}_0 = \{*\}$, ces deux objets coïncident.

## 2-catégories linéaires

- Une catégorie monoïdale $\mathbb{K}$-linéaire est une catégorie $\mathcal{A}$ munie:
  - un produit tensoriel $\otimes : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ associatif.
  - un objet unité $\mathbb{1}$ tel que $1 \otimes A = A = A \otimes 1$ pour tout objet de $\mathcal{A}$.
  - une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour chaque espace de morphismes $\mathcal{A}(A, B)$.
  - la composition et le produit tensoriel de morphismes sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

- Une $2$-catégorie $\mathbb{K}$-linéaire est la donnée d'une $2$-catégorie $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ telle que:
  - pour tous $p$, $q$ dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2(p, q)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
  - $\star_0$ et $\star_1$-composition de $1$-cellules sont $\mathbb{K}$-bilinéaires.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \arrow[r, bend left, "v"] \arrow[r, bend right, "v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow g"] & z \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u \star_0 v"] \arrow[r, bend right, "u' \star_0 v'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "u"] \arrow[r, "v" description] \arrow[r, bend right=60, "w"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow g"] & y \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "w"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & y \end{tikzcd}$$

- Lorsque $\mathcal{C}_0 = \{*\}$, ces deux objets coïncident.

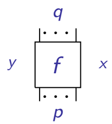
$$\text{objets de } \mathcal{A} \leftrightarrow 1\text{-cellules de } \mathcal{C}$$

$$\text{morphismes de } \mathcal{A} \leftrightarrow 2\text{-cellules de } \mathcal{C}$$

$$\otimes \leftrightarrow \star_0, \qquad \text{composition de morphismes} \leftrightarrow \star_1$$

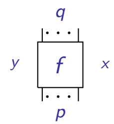
# Diagrammes de cordes

- Les 2-cellules d'une 2-catégorie (linéaire) peuvent être représentées par des diagrammes de cordes :




$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=50, "p"] \arrow[r, bend right=50, "q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] & y \end{tikzcd}$$

- Les 2-cellules d'une 2-catégorie (linéaire) peuvent être représentées par des diagrammes de cordes :



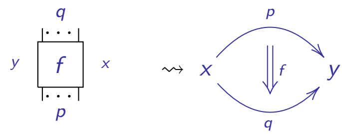

$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "p"] \arrow[rr, bend right=50, "q"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow f"] & & y \end{tikzcd}$$

- Compositions:

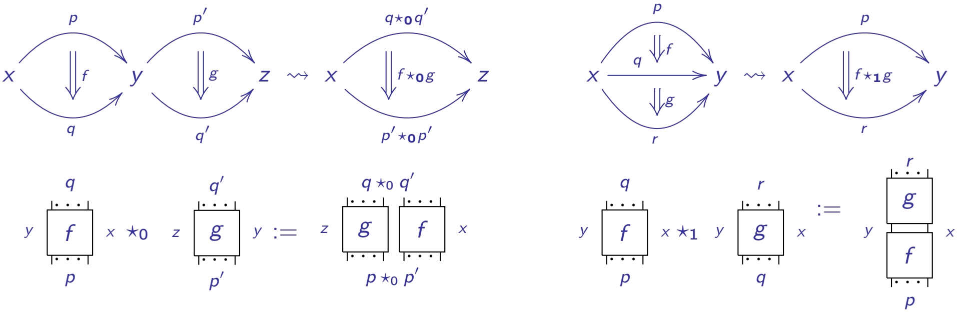
$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "p"] \arrow[rr, bend right=50, "q"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow f"] & & y \arrow[rr, bend left=50, "p'"] \arrow[rr, bend right=50, "q'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow g"] & & z \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "q \star_0 q'"] \arrow[rr, bend right=50, "p' \star_0 p'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow f \star_0 g"] & & z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=70, "p"] \arrow[rr, "q"] \arrow[rr, bend right=70, "r"'] \arrow[rr, phantom, bend left=35, "\Downarrow f"] \arrow[rr, phantom, bend right=35, "\Downarrow g"] & & y \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "p"] \arrow[rr, bend right=50, "r"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow f \star_1 g"] & & y \end{tikzcd}$$

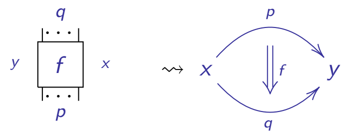
- Les 2-cellules d'une 2-catégorie (linéaire) peuvent être représentées par des diagrammes de cordes :



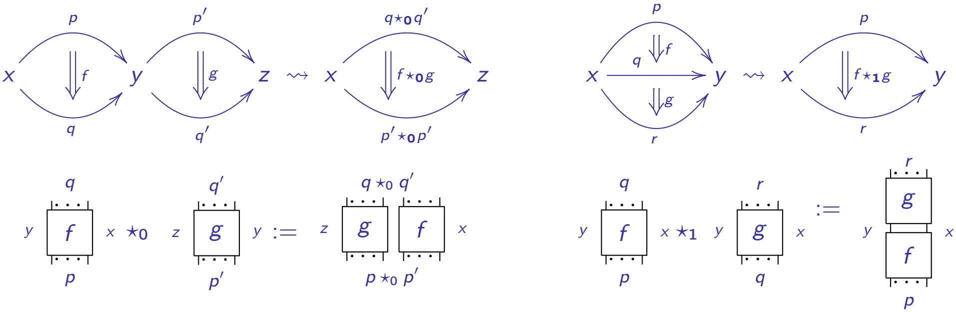
- Compositions:



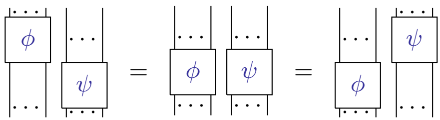
- Les 2-cellules d'une 2-catégorie (linéaire) peuvent être représentées par des diagrammes de cordes :




- Compositions:




- Ces compositions satisfont la relation d'échange :



# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les 2-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$**-polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

# Présentations de $2$-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3, 2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.

# Présentations de $2$-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 : * \to *\}$.

# Présentations de $2$-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.

- $P_1^*$: $1$-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 : * \to *\}$.

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les 2-catégories linéaires sont présentées par des $(3, 2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: 1-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 : * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: $1$-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$P_2 \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} P_1^*$$

  satisfaisant des relations globulaires :
  $s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1.$

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 \,:\, * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: $1$-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$
\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, shift left, "s_1"] \arrow[r, shift right, "t_1"'] & P_1^* \end{tikzcd}
$$

satisfaisant des relations globulaires :
$s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 \,:\, * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: $1$-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$P_2 \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} P_1^*$$

  satisfaisant des relations globulaires :
  $s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1$.
- $P_2^*$: $2$-catégorie libre sur $(P_0, P_1, P_2)$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 \; : \; * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les 2-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: 1-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$P_2 \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} P_1^*$$

satisfaisant des relations globulaires :
$s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- $P_2^*$: 2-catégorie libre sur $(P_0, P_1, P_2)$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 \; : \; * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$
- $P_2^* = \{ \star_0, \star_1$ compositions de points et croisements$\}$.

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: $1$-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$P_2 \underset{t_1}{\overset{s_1}{\rightrightarrows}} P_1^*$$

  satisfaisant des relations globulaires :
  $s_0 s_1 = s_0 t_1,\ t_0 s_1 = t_0 t_1.$
- $P_2^*$: $2$-catégorie libre sur $(P_0, P_1, P_2)$.
- $P_2^\ell$: $2$-catégorie linéaire libre sur $(P_0, P_1, P_2)$:

$$\forall x, y \in P_1^* : \ \ P_2^\ell(x,y) = \mathbb{K}[P_2^*(x,y)].$$

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 : * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$
- $P_2^* = \{\ \star_0,\ \star_1$ compositions de points et croisements$\}$.

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les 2-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: 1-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$P_2 \underset{t_1}{\overset{s_1}{\rightrightarrows}} P_1^*$$

satisfaisant des relations globulaires :
$s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- $P_2^*$: 2-catégorie libre sur $(P_0, P_1, P_2)$.
- $P_2^\ell$: 2-catégorie linéaire libre sur $(P_0, P_1, P_2)$:

$$\forall x, y \in P_1^* : \; P_2^\ell(x,y) = \mathbb{K}[P_2^*(x,y)].$$

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 : * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$
- $P_2^* = \{ \star_0, \star_1$ compositions de points et croisements$\}$.
- $P_2^\ell = \{\mathbb{K} -$ combinaisons linéaires de $P_2^* \}$

# Présentations de 2-catégories linéaires

- Les $2$-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_1^*$: $1$-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- **Extension cellulaire**

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, shift left, "s_1"] \arrow[r, shift right, "t_1"'] & P_1^* \end{tikzcd}$$

satisfaisant des relations globulaires :
$s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1$.

- $P_2^*$: $2$-catégorie libre sur $(P_0, P_1, P_2)$.
- $P_2^\ell$: $2$-catégorie linéaire libre sur $(P_0, P_1, P_2)$:

$$\forall x, y \in P_1^* : \;\; P_2^\ell(x,y) = \mathbb{K}[P_2^*(x,y)].$$

- Extension cellulaire

$$\begin{tikzcd} P_3 \arrow[r, shift left, "s_2"] \arrow[r, shift right, "t_2"'] & P_2^\ell \end{tikzcd}$$

satisfaisant $s_1 s_2 = s_1 t_2, \; t_1 s_2 = t_1 t_2$.

- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 \, : \, * \to *\}$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$
- $P_2^* = \{\, \star_0, \star_1$ compositions de points et croisements$\}$.
- $P_2^\ell = \{\mathbb{K} -$ combinaisons linéaires de $P_2^*\}$

# Présentations de 2-catégories linéaires

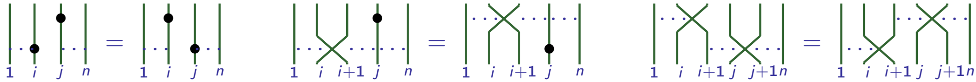
- Les 2-catégories linéaires sont présentées par des $(3,2)$-**polygraphes linéaires**, qui consistent en un quadruplet $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ avec :

- $(P_1, P_0)$ est un graphe orienté, avec applications source et but $s_0, t_0$.
- $P_0 = \{*\}, P_1 = \{1 : * \to *\}$.
- $P_1^*$: 1-catégorie libre engendrée par $(P_0, P_1)$.
- $P_1^* \simeq \mathbb{N}$ (Nombre de brins).
- **Extension cellulaire**
$$P_2 \overset{s_1}{\underset{t_1}{\rightrightarrows}} P_1^*$$
satisfaisant des relations globulaires :
$s_0 s_1 = s_0 t_1, \; t_0 s_1 = t_0 t_1$.
- $P_2 = \{$  $: 2 \to 2,$  $: 1 \to 1\}$
- $P_2^*$: 2-catégorie libre sur $(P_0, P_1, P_2)$.
- $P_2^* = \{ \star_0, \star_1$ compositions de points et croisements$\}$.
- $P_2^\ell$: 2-catégorie linéaire libre sur $(P_0, P_1, P_2)$:
$$\forall x, y \in P_1^* : \;\; P_2^\ell(x,y) = \mathbb{K}[P_2^*(x,y)].$$
- $P_2^\ell = \{\mathbb{K} -$ combinaisons linéaires de $P_2^*\}$
- Extension cellulaire
$$P_3 \overset{s_2}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} P_2^\ell$$
satisfaisant $s_1 s_2 = s_1 t_2, \; t_1 s_2 = t_1 t_2$.
- $P_3$ fixe une orientation des relations de la 2-catégorie linéaire présentée, *i.e.*
$$P_2^\ell \, / \equiv_{P_3} .$$

- **Exemple :** Pour les algèbres nil Hecke,

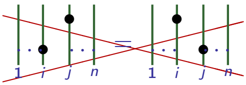
# Présentations de 2-catégories linéaires

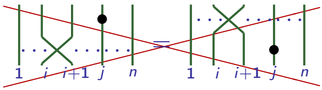
- **Exemple :** Pour les algèbres nil Hecke,

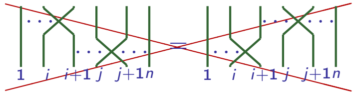


## Présentations de 2-catégories linéaires

- **Exemple :** Pour les algèbres nil Hecke,

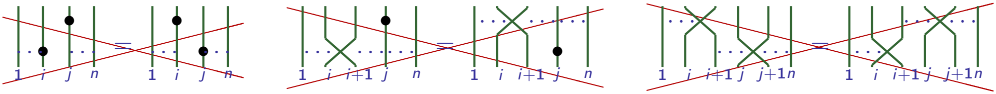






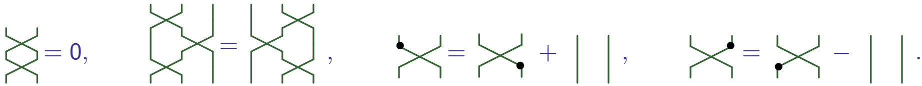

  - Ce sont des relations d'échange, et n'ont pas besoin d'être prises en compte dans la 2-catégorie.

- **Exemple :** Pour les algèbres nil Hecke,



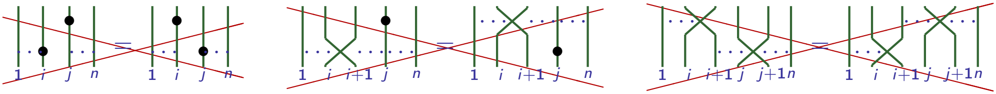

  - Ce sont des relations d'échange, et n'ont pas besoin d'être prises en compte dans la 2-catégorie.

- Relations restantes :



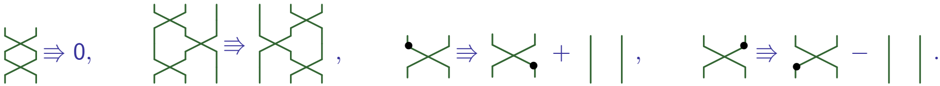
# Présentations de 2-catégories linéaires

- **Exemple :** Pour les algèbres nil Hecke,




  - Ce sont des relations d'échange, et n'ont pas besoin d'être prises en compte dans la 2-catégorie.

- Relations restantes :




- Cette extension cellulaire définit un $(3, 2)$-polygraphe linéaire présentant une 2-catégorie linéaire $\mathcal{C}$ telle que

$$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(n) \simeq \mathcal{NH}_n$$

# Étapes de réécriture

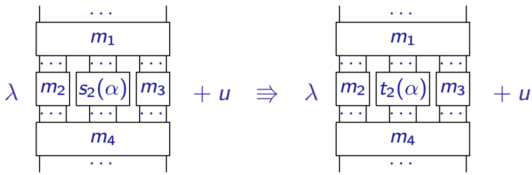
- Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est **monomial à gauche**, *i.e.* toute source d'une $3$-cellule est un monôme.
  - **Hypothèse :** Tous les $(3,2)$-polygraphes linéaires considérés seront monomiaux à gauche.

# Étapes de réécriture

- Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est **monomial à gauche**, *i.e.* toute source d'une $3$-cellule est un monôme.
  - **Hypothèse :** Tous les $(3,2)$-polygraphes linéaires considérés seront monomiaux à gauche.
- Étant donné un $(3,2)$-polygraphe linéaire $P$, les chemins de réécriture pour $P$ sont interprétés comme des $3$-cellules dans la $(3,2)$-catégorie linéaire libre $P_3^{\ell}$ engendrée par $P$.

# Étapes de réécriture

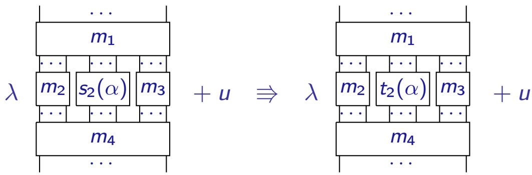
- Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est **monomial à gauche**, *i.e.* toute source d'une $3$-cellule est un monôme.
  - **Hypothèse :** Tous les $(3,2)$-polygraphes linéaires considérés seront monomiaux à gauche.
- Étant donné un $(3,2)$-polygraphe linéaire $P$, les chemins de réécriture pour $P$ sont interprétés comme des $3$-cellules dans la $(3,2)$-catégorie linéaire libre $P_3^\ell$ engendrée par $P$.
- Une **étape de réécriture** d'un $(3,2)$-polygraphe linéaire est une $3$-cellule de la forme




où $\alpha \in P_3$, et telle que $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition monomiale de $u$.

# Étapes de réécriture

- Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est **monomial à gauche**, *i.e.* toute source d'une $3$-cellule est un monôme.
  - **Hypothèse :** Tous les $(3,2)$-polygraphes linéaires considérés seront monomiaux à gauche.
- Étant donné un $(3,2)$-polygraphe linéaire $P$, les chemins de réécriture pour $P$ sont interprétés comme des $3$-cellules dans la $(3,2)$-catégorie linéaire libre $P_3^\ell$ engendrée par $P$.
- Une **étape de réécriture** d'un $(3,2)$-polygraphe linéaire est une $3$-cellule de la forme

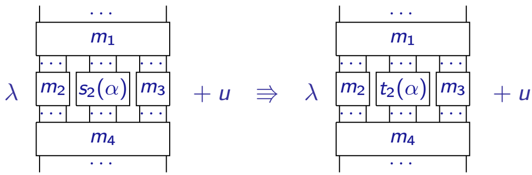



  où $\alpha \in P_3$, et telle que $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition monomiale de $u$.
- Cette condition permet d'éviter de la non-terminaison triviale: si il y a une règle $u \Rrightarrow v$, alors $-u \Rrightarrow -v$, et :

$$-u + (u+v) \Rrightarrow -v + (u+v), \quad i.e. \quad v \Rrightarrow u.$$

# Étapes de réécriture

- Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est **monomial à gauche**, *i.e.* toute source d'une $3$-cellule est un monôme.
  - **Hypothèse :** Tous les $(3,2)$-polygraphes linéaires considérés seront monomiaux à gauche.
- Étant donné un $(3,2)$-polygraphe linéaire $P$, les chemins de réécriture pour $P$ sont interprétés comme des $3$-cellules dans la $(3,2)$-catégorie linéaire libre $P_3^\ell$ engendrée par $P$.
- Une **étape de réécriture** d'un $(3,2)$-polygraphe linéaire est une $3$-cellule de la forme

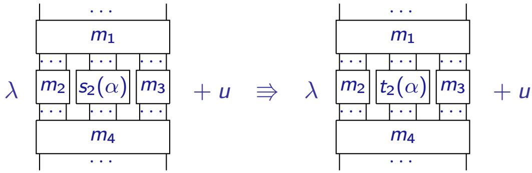



  où $\alpha \in P_3$, et telle que $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition monomiale de $u$.
- Cette condition permet d'éviter de la non-terminaison triviale: si il y a une règle $u \Rightarrow v$, alors $-u \Rightarrow -v$, et :

$$-u + (u+v) \not\Rrightarrow -v + (u+v), \quad i.e. \quad v \Rightarrow u.$$

# Étapes de réécriture

- Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est **monomial à gauche**, *i.e.* toute source d'une $3$-cellule est un monôme.
  - **Hypothèse :** Tous les $(3,2)$-polygraphes linéaires considérés seront monomiaux à gauche.
- Étant donné un $(3,2)$-polygraphe linéaire $P$, les chemins de réécriture pour $P$ sont interprétés comme des $3$-cellules dans la $(3,2)$-catégorie linéaire libre $P_3^{\ell}$ engendrée par $P$.
- Une **étape de réécriture** d'un $(3,2)$-polygraphe linéaire est une $3$-cellule de la forme




  où $\alpha \in P_3$, et telle que $m_1 \star_1 (m_2 \star_0 s_2(\alpha) \star_0 m_3) \star_1 m_4$ n'apparaît pas dans la décomposition monomiale de $u$.
- Cette condition permet d'éviter de la non-terminaison triviale: si il y a une règle $u \Rrightarrow v$, alors $-u \Rrightarrow -v$, et :

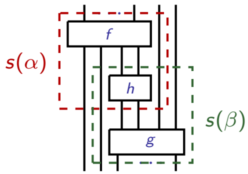
$$-u + (u+v) \cancel{\Rrightarrow} -v + (u+v), \quad i.e. \quad v \Rrightarrow u.$$

- **Lemme de Newman :** Si $P$ termine, il est confluent ssi il est localement confluent.

- **Branchements critiques** de $(3,2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.

- **Branchements critiques** de $(3,2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.

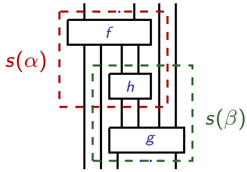
  - **Réguliers** :

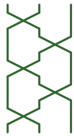


# Branchements critiques

- **Branchements critiques** de $(3,2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.

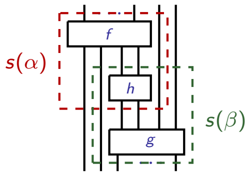
  - **Réguliers** :

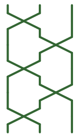


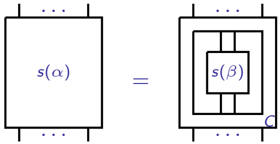
- **Branchements critiques** de $(3,2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.

  - **Réguliers** :



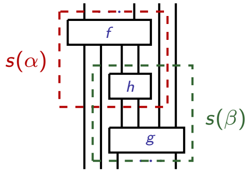



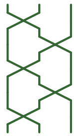
  - **Inclusion** :



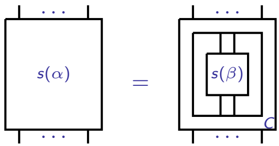
# Branchements critiques

- **Branchements critiques** de $(3,2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.
  - **Réguliers** :

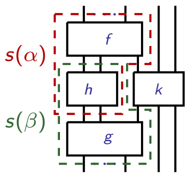


  - **Inclusion** :

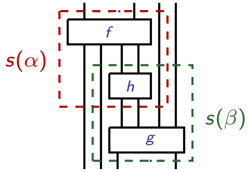


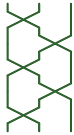

  - **Indexés à droite** (aussi **indexés à gauche**, **multi-indexés**) :



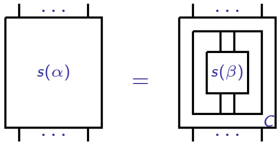
- **Branchements critiques** de $(3, 2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.

  - **Réguliers** :

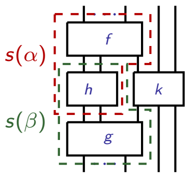


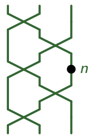



  - **Inclusion** :



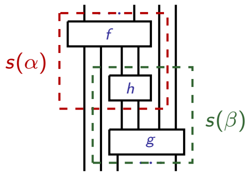

  - **Indexés à droite** (aussi **indexés à gauche**, **multi-indexés**) :



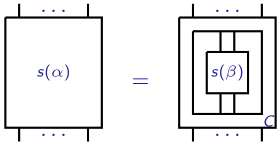



# Branchements critiques

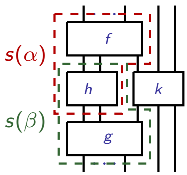
- **Branchements critiques** de $(3,2)$-polygraphes linéaires : branchements locaux sur des diagrammes de cordes minimaux.
  - **Réguliers** :

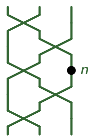



  - **Inclusion** :




  - **Indexés à droite** (aussi **indexés à gauche**, **multi-indexés**) :




- **Lemme des branchements critiques :** Un $(3,2)$-polygraphe linéaire **terminant** est localement confluent ssi tous ses branchements critiques sont confluents.

- Soit $P$ $(3,2)$-polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.

# Bases de $2$-catégories linéaires par convergence

- Soit $P$ $(3, 2)$-polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- Soit $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $P$.

## Bases de 2-catégories linéaires par convergence

- Soit $P$ $(3,2)$-polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- Soit $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $P$.
- **Théorème [Alleaume '16]** : Pour toutes 1-cellules parallèles $p$, $q$ de $\mathcal{C}$, l'ensemble des monomes en forme normale pour $P$ avec $1$-source $p$ et $1$-but $q$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p, q)$.

## Bases de $2$-catégories linéaires par convergence

- Soit $P$ $(3,2)$-polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- Soit $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $P$.
- **Théorème [Alleaume '16]** : Pour toutes 1-cellules parallèles $p$, $q$ de $\mathcal{C}$, l'ensemble des monomes en forme normale pour $P$ avec $1$-source $p$ et $1$-but $q$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p,q)$.
  - Terminaison: les monômes en forme normale engendrent $\mathcal{C}_2(p,q)$.

- Soit $P$ $(3,2)$-polygraphe linéaire monomial à gauche et convergent.
- Soit $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $P$.
- **Théorème [Alleaume '16]** : Pour toutes 1-cellules parallèles $p$, $q$ de $\mathcal{C}$, l'ensemble des monomes en forme normale pour $P$ avec $1$-source $p$ et $1$-but $q$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p,q)$.
  - Terminaison: les monômes en forme normale engendrent $\mathcal{C}_2(p,q)$.
  - Confluence: si une $2$-cellule se réduit en deux combinaisons linéaires de monômes en forme normale, elles sont égales puisque $P$ est monomial à gauche.

## Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorificaton d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

## Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorificaton d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

- Soit $\Gamma$ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, avec ensemble de sommets $I$, vus comme des couleurs:

$$\Gamma = \underset{i}{\bullet} \longrightarrow \underset{j}{\bullet} \longrightarrow \underset{k}{\bullet} \longrightarrow \underset{l}{\bullet}$$

# Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorificaton d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

- Soit $\Gamma$ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, avec ensemble de sommets $I$, vus comme des couleurs:

$$\Gamma = \underset{i}{\bullet} \longrightarrow \underset{j}{\bullet} \longrightarrow \underset{k}{\bullet} \longrightarrow \underset{l}{\bullet} \qquad (\Gamma \text{ simplement lacé})$$

## Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorificaton d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

- Soit $\Gamma$ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, avec ensemble de sommets $I$, vus comme des couleurs:

$$\Gamma = \underset{i}{\bullet} \longrightarrow \underset{j}{\bullet} \longrightarrow \underset{k}{\bullet} \longrightarrow \underset{l}{\bullet} \qquad (\Gamma \text{ simplement lacé})$$

- Soit $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i$ un élément de $\mathbb{N}[I]$, on considère l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ des suites d'éléments de $\Gamma$ où $i$ apparaît $\mathcal{V}_i$ fois.

## Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorificaton d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

- Soit $\Gamma$ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, avec ensemble de sommets $I$, vus comme des couleurs:

$$\Gamma = \begin{tikzcd} \underset{i}{\bullet} \arrow[r] & \underset{j}{\bullet} \arrow[r] & \underset{k}{\bullet} \arrow[r] & \underset{l}{\bullet} \end{tikzcd} \qquad (\Gamma \text{ simplement lacé})$$

- Soit $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i$ un élément de $\mathbb{N}[I]$, on considère l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ des suites d'éléments de $\Gamma$ où $i$ apparaît $\mathcal{V}_i$ fois.

  - **Exemple:** $\mathrm{Seq}(2i + k) = \{iik, iki, kii\}$

# Exemple: algèbres de Hecke carquois (Khovanov-Lauda-Rouquier)

- Ces algèbres apparaissent dans le processus de catégorificaton d'un groupe quantique $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ associé à une algèbre de Kac-Moody symétrisable $\mathfrak{g}$.

- Soit $\Gamma$ le graphe de Dynkin de $\mathfrak{g}$, avec ensemble de sommets $I$, vus comme des couleurs:

$$\Gamma = \underset{i}{\bullet} \longrightarrow \underset{j}{\bullet} \longrightarrow \underset{k}{\bullet} \longrightarrow \underset{l}{\bullet} \qquad (\Gamma \text{ simplement lacé})$$

- Soit $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \nu_i . i$ un élément de $\mathbb{N}[I]$, on considère l'ensemble $\mathrm{Seq}(\mathcal{V})$ des suites d'éléments de $\Gamma$ où $i$ apparaît $\mathcal{V}_i$ fois.

  - **Exemple:** $\mathrm{Seq}(2i + k) = \{iik, iki, kii\}$

- Pour un tel $\mathcal{V}$, on définit une algèbre $R(\mathcal{V})$.

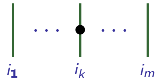
- **Théorème [Khovanov-Lauda '08]** : Si $R = \bigoplus_{\mathcal{V} \in \mathbb{N}[I]} R(\mathcal{V})$,

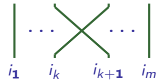
$$K_0(R - \mathrm{pmod}) \simeq \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$$

# Présentation des algèbres de Hecke carquois

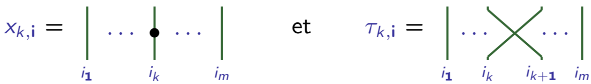
- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

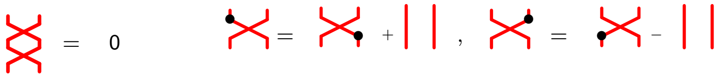
$x_{k,\mathbf{i}} =$ 

et $\tau_{k,\mathbf{i}} =$ 

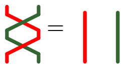
- Pour $\mathbf{i} = i_1 \ldots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par



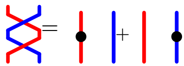

- Relations:
  **i)** Même couleur:




**ii)** Couleurs distantes :



**iii)** Couleurs proches :

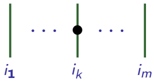


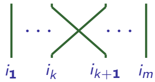
**iv)** Couleurs différentes :

**vi)** Relations de "tresses"

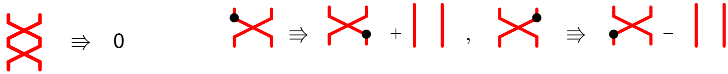
# Présentation des algèbres de Hecke carquois

- Pour $\mathbf{i} = i_1 \dots i_m \in \mathrm{Seq}(\mathcal{V})$, $R(\mathcal{V})$ est engendrée par

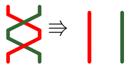
$x_{k,\mathbf{i}} =$ 

et $\tau_{k,\mathbf{i}} =$ 

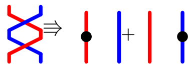

- Relations:
  - **i)** Même couleur:




  - **ii)** Couleurs distantes :

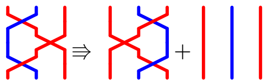


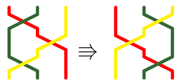

  - **iii)** Couleurs proches :




  - **iv)** Couleurs différentes :


  - **vi)** Relations de "tresses"



et sinon


# Présentation convergente des algèbres KLR

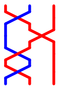
- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire est convergent.

- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.

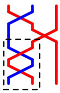
# Présentation convergente des algèbres KLR

- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.

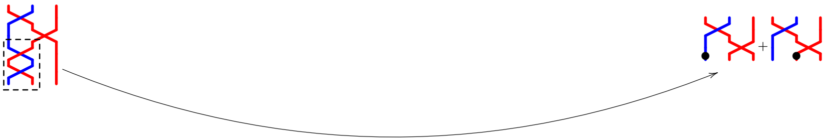
- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



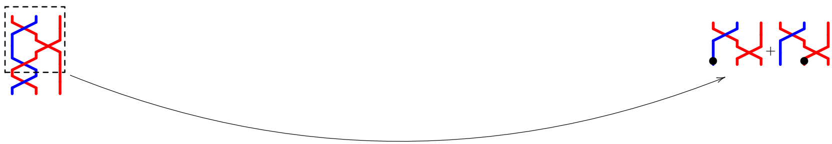
- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
    - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
    - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



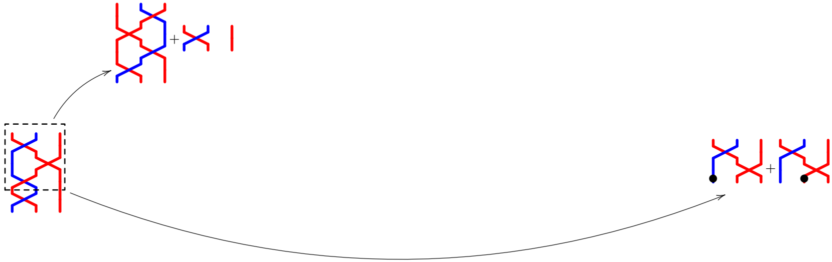
- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



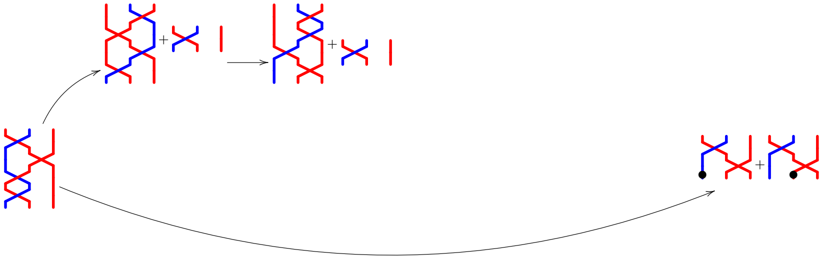
- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.

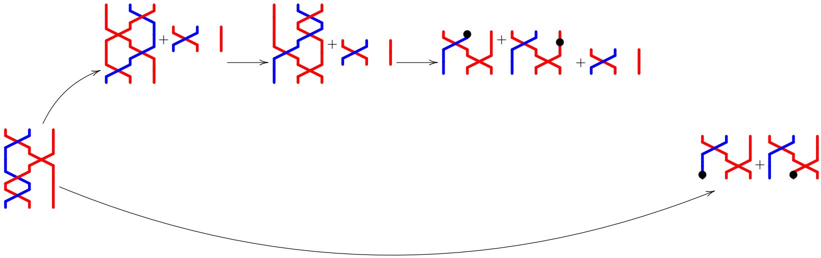


- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



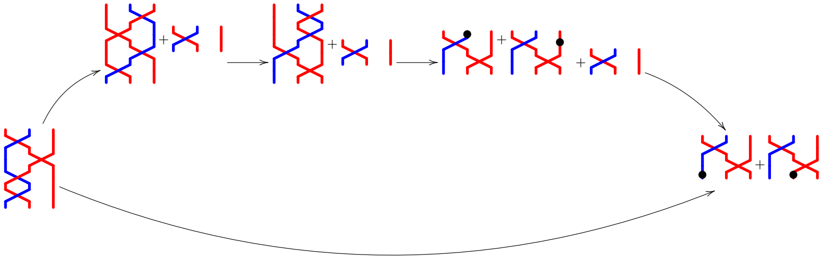
# Présentation convergente des algèbres KLR

- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



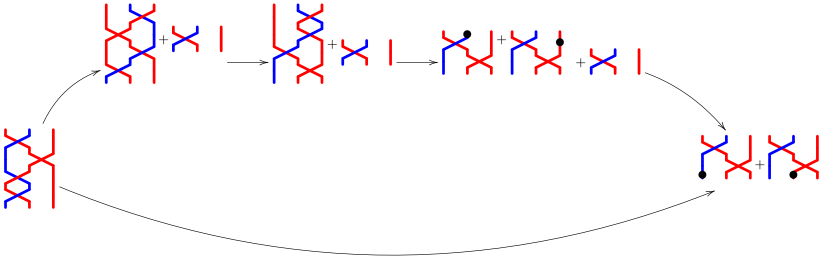
# Présentation convergente des algèbres KLR

- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3,2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



## Présentation convergente des algèbres KLR

- **Théorème [D. '17]:** Ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire est convergent.
  - Idée pour la terminaison: le nombre de croisements diminue, les permutations sont ajustées à gauche, et les points descendent en bas des brins.
  - Confluence: étude exhaustive de tous les branchements critiques.



- **Corollaire [Khovanov - Lauda '08] :** Les diagrammes de $R(\mathcal{V})$ correspondant à des permutations ajustées à gauche et minimales pour la présentation de Coxeter de $\mathcal{S}_m$ ( $m = |\mathcal{V}| = \sum_{i \in I} \mathcal{V}_i$ ) et les points en bas des brins donnent une base de $R(\mathcal{V})$.

# Terminaison par dérivation

- **Idée de la construction:**
  - Chaque $2$-cellule est vue comme un circuit éléctronique dont les composants sont les $2$-cellules génératrices.
  - Chaque générateur recoit une certaine intensité de courants ascendants et descendants, calculés à l'aide de fonctions $X$ et $Y$ étendues fonctoriellement.

# Terminaison par dérivation

- **Idée de la construction:**
  - Chaque $2$-cellule est vue comme un circuit éléctronique dont les composants sont les $2$-cellules génératrices.
  - Chaque générateur recoit une certaine intensité de courants ascendants et descendants, calculés à l'aide de fonctions $X$ et $Y$ étendues fonctoriellement.
  - Chaque $2$-cellule produit de la chaleur, calculée par la somme des chaleurs produites par ses composants, dépendant de l'intensité des courants qu'ils reçoivent.
  - Les chaleurs sont calculées par des dérivations $d$.
  - Deux circuits sont comparés par la chaleur qu'ils produisent en reçevant les mêmes intensités de courant

$$f \prec g \quad \text{ssi} \quad d(f) < d(g) \quad (\textit{resp}. f \prec g \quad \text{ssi} \quad d(f) < d(h) \text{ for any monomial } h \text{ in } g.)$$

# Terminaison par dérivation

- **Idée de la construction:**
  - Chaque $2$-cellule est vue comme un circuit éléctronique dont les composants sont les $2$-cellules génératrices.
  - Chaque générateur recoit une certaine intensité de courants ascendants et descendants, calculés à l'aide de fonctions $X$ et $Y$ étendues fonctoriellement.
  - Chaque $2$-cellule produit de la chaleur, calculée par la somme des chaleurs produites par ses composants, dépendant de l'intensité des courants qu'ils reçoivent.
  - Les chaleurs sont calculées par des dérivations $d$.
  - Deux circuits sont comparés par la chaleur qu'ils produisent en reçevant les mêmes intensités de courant

$$f \prec g \quad \text{ssi} \quad d(f) < d(g) \quad (\textit{resp}. f \prec g \quad \text{ssi} \quad d(f) < d(h) \text{ for any monomial } h \text{ in } g.)$$

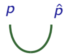
- **Théorème [Guiraud-Malbos '09]** : Soit $P$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire. Si il existe :
  - Deux $2$-foncteurs $X : P_2^* \to \mathbf{Ord}$ et $Y : (P_2^*)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ord}$ t.q. pour toute $1$-cellule $p \in P_1$, les ensembles $X(p)$ et $Y(p)$ sont non vides, et pour toute $3$-cellule génératrice $\alpha$ de $P_3$, les inégalités $X(s_2(\alpha)) \geq X(h)$ et $Y(s_2(\alpha)) \geq Y(h)$ sont satisfaites pour tout monôme $h$ de $t_2(\alpha)$.
  - Un groupe abélien $G$ de $\mathbf{Ord}$ dont l'addition est strictement monotone en les deux arguments, et telle que tout suite décroissante déléents non-négatifs de $G$ est stationnaire.
  - Une dérivation $P_2^*$ à valeurs dans un $P_2^*$-module $M_{X,Y,G}$ telle que pour toute $2$-cellule $u \in P_2^*$, on a $d(u) \geq 0$, et pour toute $3$-cellule génératrice $\alpha$ de $P_3$, $d(s_2(\alpha)) > d(h)$ pour tout monôme $h$ dans $t_2(\alpha)$.

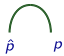
  Alors, le $(3,2)$-polygraphe linéaire $P$ termine.

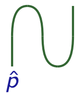
# III. Réécriture modulo isotopies dans des catégories pivotales

# 2-catégories linéaires pivotales

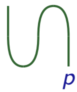
- Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie linéaire. Si $p$ est 1-cellule, un **adjoint à gauche** de $p$ est une 1-cellule $\hat{p}$ telle qu'il existe des 2-cellules

$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}$, $\varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1$, 

, 

t.q. 

$=$ 

, 

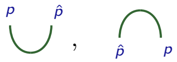
$=:$ 

.

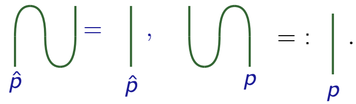
## 2-catégories linéaires pivotales

- Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie linéaire. Si $p$ est 1-cellule, un **adjoint à gauche** de $p$ est une 1-cellule $\hat{p}$ telle qu'il existe des 2-cellules

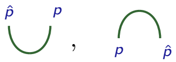
$$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1,$$



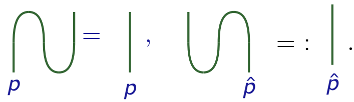
t.q.



- Si $\hat{p}$ est de plus un **adjoint à droite** de $p$, on dit qu'ils sont **biadjoints** et on a aussi

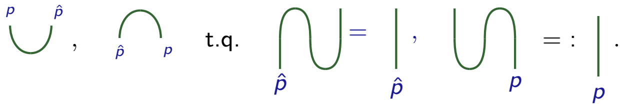


s.t.

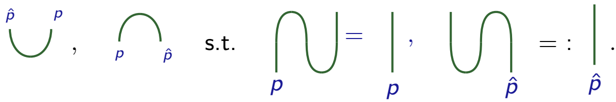


- Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie linéaire. Si $p$ est 1-cellule, un **adjoint à gauche** de $p$ est une 1-cellule $\hat{p}$ telle qu'il existe des 2-cellules

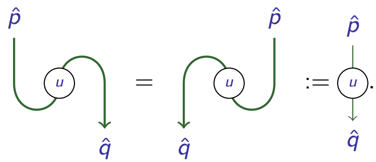
$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}, \quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1,$



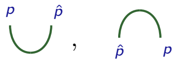

- Si $\hat{p}$ est de plus un **adjoint à droite** de $p$, on dit qu'ils sont **biadjoints** et on a aussi

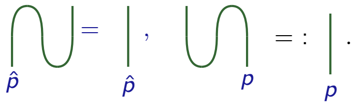



- Une 2-cellule $u : p \Rightarrow q$ est **cyclique** relativement à une biadjonction $(p, \hat{p})$, $(q, \hat{q})$ si

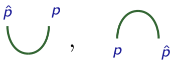


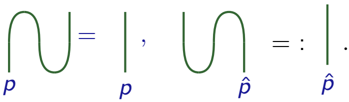
- Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie linéaire. Si $p$ est 1-cellule, un **adjoint à gauche** de $p$ est une 1-cellule $\hat{p}$ telle qu'il existe des 2-cellules

$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}$, $\varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1$, 

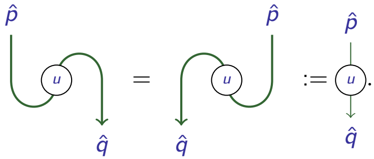
t.q. 


- Si $\hat{p}$ est de plus un **adjoint à droite** de $p$, on dit qu'ils sont **biadjoints** et on a aussi



s.t. 


- Une 2-cellule $u : p \Rightarrow q$ est **cyclique** relativement à une biadjonction $(p, \hat{p})$, $(q, \hat{q})$ si

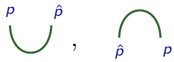



- **Fait :** Deux diagrammes de cordes égaux à isotopie près représentent la même 2-cellule.

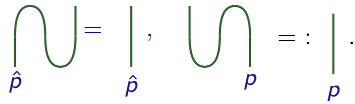
# 2-catégories linéaires pivotales

- Soit $\mathcal{C}$ une 2-catégorie linéaire. Si $p$ est 1-cellule, un **adjoint à gauche** de $p$ est une 1-cellule $\hat{p}$ telle qu'il existe des 2-cellules

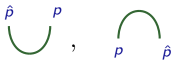
$\eta_p : 1 \Rightarrow p \star_0 \hat{p}$, $\quad \varepsilon_p : \hat{p} \star_0 p \Rightarrow 1$,



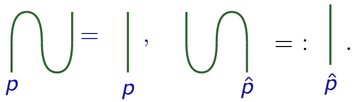

t.q.



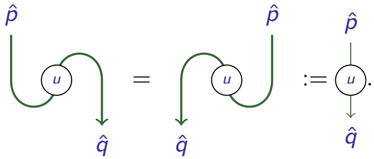

- Si $\hat{p}$ est de plus un **adjoint à droite** de $p$, on dit qu'ils sont **biadjoints** et on a aussi



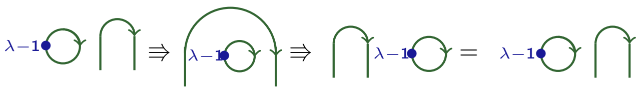

s.t.




- Une 2-cellule $u : p \Rightarrow q$ est **cyclique** relativement à une biadjonction $(p, \hat{p})$, $(q, \hat{q})$ si




- **Fait :** Deux diagrammes de cordes égaux à isotopie près représentent la même 2-cellule.
- **Difficulté 1 :**Si une 2-catégorie linéaire pivotale admet des **relations 'bubble slide'**, elle ne peut être présentée par un polygraphe terminant :




- On considère des systèmes de réécriture **quasi-terminants**, *i.e.* terminants à cycles de réécriture près.

# Réécriture modulo isotopie

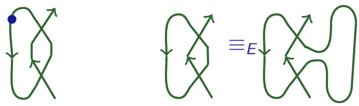
- **Difficulté 2 :** Certaines relations sont déduites d'autres relations par une transformation par isotopie.
  - Pour éviter d'orienter trop de relations, on réécrit **modulo isotopie**.
  - On scinde les règles en deux parties: un ensemble $E$ d'équations non orientées et un ensemble $R$ de relations orientées.

## Réécriture modulo isotopie

- **Difficulté 2 :** Certaines relations sont déduites d'autres relations par une transformation par isotopie.
  - Pour éviter d'orienter trop de relations, on réécrit **modulo isotopie**.
  - On scinde les règles en deux parties: un ensemble $E$ d'équations non orientées et un ensemble $R$ de relations orientées.
  - Facilite l'analyse de la confluence de certains branchements.
  - Réduit le nombre de branchements à considérer.

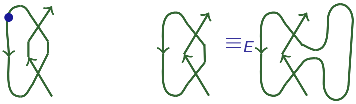
# Réécriture modulo isotopie

- **Difficulté 2 :** Certaines relations sont déduites d'autres relations par une transformation par isotopie.
  - Pour éviter d'orienter trop de relations, on réécrit **modulo isotopie**.
  - On scinde les règles en deux parties: un ensemble $E$ d'équations non orientées et un ensemble $R$ de relations orientées.
  - Facilite l'analyse de la confluence de certains branchements.
  - Réduit le nombre de branchements à considérer.
  - Cependant, peut être source de nouveaux cycles de réécriture, et les branchements critiques sont plus durs à lister, puisqu'ils correspondent à des applications de relations orientées sur deux diagrammes égaux à isotopie près.



# Réécriture modulo isotopie

- **Difficulté 2 :** Certaines relations sont déduites d'autres relations par une transformation par isotopie.
  - Pour éviter d'orienter trop de relations, on réécrit **modulo isotopie**.
  - On scinde les règles en deux parties: un ensemble $E$ d'équations non orientées et un ensemble $R$ de relations orientées.
  - Facilite l'analyse de la confluence de certains branchements.
  - Réduit le nombre de branchements à considérer.
  - Cependant, peut être source de nouveaux cycles de réécriture, et les branchements critiques sont plus durs à lister, puisqu'ils correspondent à des applications de relations orientées sur deux diagrammes égaux à isotopie près.

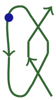


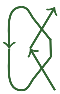
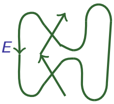

- Trois principaux paradigmes de réécriture modulo :
  - Réécriture avec les relations de $R$, et confluence modulo $E$, **Huet '80**.

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "R"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "R"] & w \arrow[d, leftrightarrow, "E"] \\
v \arrow[r, "R"'] & v' \arrow[r, dotted, "R"'] & w'
\end{tikzcd}$$

# Réécriture modulo isotopie

- **Difficulté 2 :** Certaines relations sont déduites d'autres relations par une transformation par isotopie.
  - Pour éviter d'orienter trop de relations, on réécrit **modulo isotopie**.
  - On scinde les règles en deux parties: un ensemble $E$ d'équations non orientées et un ensemble $R$ de relations orientées.
  - Facilite l'analyse de la confluence de certains branchements.
  - Réduit le nombre de branchements à considérer.
  - Cependant, peut être source de nouveaux cycles de réécriture, et les branchements critiques sont plus durs à lister, puisqu'ils correspondent à des applications de relations orientées sur deux diagrammes égaux à isotopie près.



 $\equiv_E$ 

- Trois principaux paradigmes de réécriture modulo :
  - Réécriture avec les relations de $R$, et confluence modulo $E$, **Huet '80**.

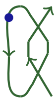
$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "R"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "R"] & w \arrow[d, leftrightarrow, "E"] \\
v \arrow[r, "R"'] & v' \arrow[r, dotted, "R"'] & w'
\end{tikzcd}
$$

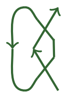
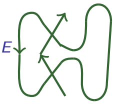
  - Réécriture avec $R$ su des $E$-classes d'équivalence :

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, dotted, "{}_E R_E"] \arrow[d, "E"'] & v \arrow[d, "E"] \\
u' \arrow[r, "R"'] & v'
\end{tikzcd}
$$

# Réécriture modulo isotopie

- **Difficulté 2 :** Certaines relations sont déduites d'autres relations par une transformation par isotopie.
  - Pour éviter d'orienter trop de relations, on réécrit **modulo isotopie**.
  - On scinde les règles en deux parties: un ensemble $E$ d'équations non orientées et un ensemble $R$ de relations orientées.
  - Facilite l'analyse de la confluence de certains branchements.
  - Réduit le nombre de branchements à considérer.
  - Cependant, peut être source de nouveaux cycles de réécriture, et les branchements critiques sont plus durs à lister, puisqu'ils correspondent à des applications de relations orientées sur deux diagrammes égaux à isotopie près.



 $\equiv_E$ 

- Trois principaux paradigmes de réécriture modulo :
  - Réécriture avec les relations de $R$, et confluence modulo $E$, **Huet '80**.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "R"] \arrow[d, leftrightarrow, "E"'] & u' \arrow[r, dotted, "R"] & w \arrow[d, leftrightarrow, "E"] \\ v \arrow[r, "R"'] & v' \arrow[r, dotted, "R"'] & w' \end{tikzcd}$$

  - Réécriture avec $R$ su des $E$-classes d'équivalence :

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, dotted, "{}_E R_E"] \arrow[d, "E"'] & v \arrow[d, "E"] \\ u' \arrow[r, "R"'] & v' \end{tikzcd}$$

  - Système de réécriture modulo : $(R, E, S)$ tel que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, [**Jouannaud-Kirchner '84**].

## $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.

# $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de

## $(3, 2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3, 2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3, 2)$-polygraphe linéaire $R$,

## $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,

## $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^\ell$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^\ell \times R^{\ell(1)} \times E^\ell$ comme suit :

# $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.

- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^{\ell}$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^{\ell} \times R^{\ell(1)} \times E^{\ell}$ comme suit :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
u \arrow[r, bend left=80, ""{name=A, below}] \arrow[r, bend left=25, ""{name=B, above}, ""{name=B2, below}] \arrow[r, bend right=25, ""{name=C, above}, ""{name=C2, below}] \arrow[r, bend right=80, ""{name=D, above}] & v
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "e"] \arrow[Rightarrow, from=B2, to=C, "f"] \arrow[Rightarrow, from=C2, to=D, "e'"]
\end{tikzcd}
$$

# $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

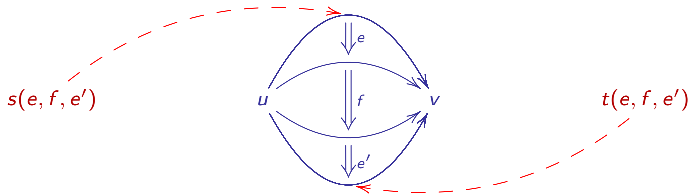
- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.

- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^{\ell}$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^{\ell} \times R^{\ell(1)} \times E^{\ell}$ comme suit :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
s(e,f,e') & u \arrow[r, bend left=80, ""{name=A, below}] \arrow[r, bend left=25, ""{name=B, above}, ""{name=B2, below}] \arrow[r, bend right=25, ""{name=C, above}, ""{name=C2, below}] \arrow[r, bend right=80, ""{name=D, above}] & v & t(e,f,e')
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "e"]
\arrow[Rightarrow, from=B2, to=C, "f"]
\arrow[Rightarrow, from=C2, to=D, "e'"]
\end{tikzcd}$$

## $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

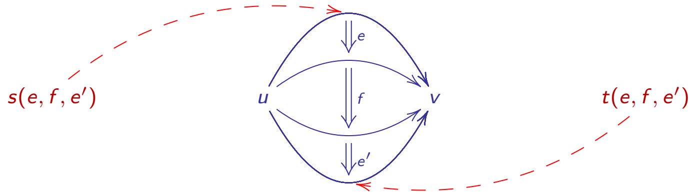
- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^\ell$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^\ell \times R^{\ell(1)} \times E^\ell$ comme suit :




  - $f$ est une étape de réécriture de $R$,

# $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

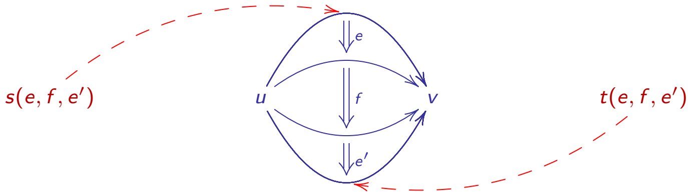
- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^{\ell}$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^{\ell} \times R^{\ell(1)} \times E^{\ell}$ comme suit :




  - $f$ est une étape de réécriture de $R$,
  - $e$ et $e'$ sont des $E$-congruences.

# $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^{\ell}$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^{\ell} \times R^{\ell(1)} \times E^{\ell}$ comme suit :




  - $f$ est une étape de réécriture de $R$,
  - $e$ et $e'$ sont des $E$-congruences.
- Un **branchement modulo** $E$ de $S$ est un triplet $(f, e, g)$ où $f$ et $g$ sont $S$-chemins de réécriture et $e$ est une $E$-congruence, tel que :

# $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.
- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^\ell$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^\ell \times R^{\ell(1)} \times E^\ell$ comme suit :

$$
\begin{tikzcd}
s(e,f,e') & u \arrow[r, bend left=80] \arrow[r, bend left=30] \arrow[r, bend right=30] \arrow[r, bend right=80] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow e"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow e'"] & v & t(e,f,e')
\end{tikzcd}
$$

  - $f$ est une étape de réécriture de $R$,
  - $e$ et $e'$ sont des $E$-congruences.
- Un **branchement modulo** $E$ de $S$ est un triplet $(f, e, g)$ où $f$ et $g$ sont $S$-chemins de réécriture et $e$ est une $E$-congruence, tel que :

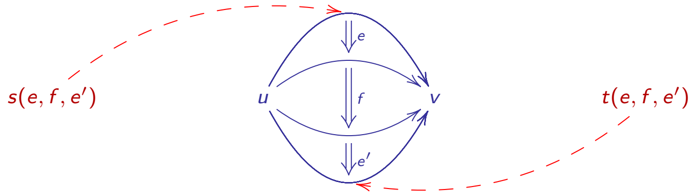
$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & u' \\
v \arrow[r, "g"'] & v'
\end{tikzcd}
$$

- Un tel branchement est local si $f$ est une $S$-étape de réécriture, et $g$, $e$ satisfont $\ell(g) + \ell(e) = 1$.

## $(3,2)$-polygraphes linéaires modulo

- On introduit un cadre polygraphique adapté à la réécriture modulo dans des $2$-categories linéaires.

- Un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo est un triplet $(R, E, S)$ composé de
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $R$,
  - un $(3,2)$-polygraphe linéaire $E$ tel que $E_0 = R_0$, $E_1 = R_1$ et $E_2 \subseteq R_2$,
  - $S$ est une extension cellulaire de $R_2^\ell$ telle que $R \subseteq S \subseteq {}_E R_E$, où l'extension cellulaire ${}_E R_E$ est donnée par les triplets $(e, f, e') \in E^\ell \times R^{\ell(1)} \times E^\ell$ comme suit :




  - $f$ est une étape de réécriture de $R$,
  - $e$ et $e'$ sont des $E$-congruences.

- Un **branchement modulo** $E$ de $S$ est un triplet $(f, e, g)$ où $f$ et $g$ sont $S$-chemins de réécriture et $e$ est une $E$-congruence, tel que :

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & u' \arrow[r, dotted, "f'"] & w \arrow[d, dotted, "e'"] \\ v \arrow[r, "g"'] & v' \arrow[r, dotted, "g'"'] & w' \end{tikzcd}$$

- Un tel branchement est local si $f$ est une $S$-étape de réécriture, et $g$, $e$ satisfont $\ell(g) + \ell(e) = 1$.

- Il est confluent modulo $E$ si il existe des $S$-chemins de réécriture $f'$, $g'$, et une $E$-congruence comme ci-dessus.

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "||"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w
\end{tikzcd}$$

sont confluents modulo $E$.

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd} \qquad {}_E R \subseteq S$$

sont confluents modulo $E$.

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal, "\|"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w
\end{tikzcd}
\qquad {}_E R \subseteq S
$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd} \qquad {}_E R \subseteq S$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supponsons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

## Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "\|"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\
u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\
u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w
\end{tikzcd}
\qquad {}_E R \subseteq S
$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supponsons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

- Considérons une $2$-cellule $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd} \qquad {}_E R \subseteq S$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supposons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

- Considérons une $2$-cellule $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

$$u \overset{S^*}{\Rrightarrow} \sum \hat{u}_i,$$

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd} \qquad {}_E R \subseteq S$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supposons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

- Considérons une $2$-cellule $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

$$u \overset{S^*}{\Rrightarrow} \sum \hat{u}_i, \qquad \hat{u}_i \overset{NF(E)}{\rightsquigarrow} \sum v_{i,k}.$$

## Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\ u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w \end{tikzcd} \qquad {}_E R \subseteq S$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supposons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

- Considérons une $2$-cellule $u \in \mathcal{C}_2(p,q)$,

$$u \overset{S^*}{\Rrightarrow} \sum \hat{u}_i, \qquad \hat{u}_i \overset{NF(E)}{\rightsquigarrow} \sum v_{i,k}.$$

- **Théorème [D. '19]** : L'ensemble $\{v_{i,k} \text{ thus defined} \mid u \in \mathcal{C}_2(p,q)\}$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p,q)$.

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "\parallel"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\
u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^*"'] & w'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^*"] & v' \arrow[d, dotted, "E^\top"] \\
u' \arrow[rr, dotted, "S^*"'] & & w
\end{tikzcd}
\qquad {}_E R \subseteq S
$$

  sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3, 2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supposons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

- Considérons une $2$-cellule $u \in \mathcal{C}_2(p, q)$,

$$u \overset{S^*}{\Rrightarrow} \sum \hat{u}_i, \qquad \hat{u}_i \overset{NF(E)}{\rightsquigarrow} \sum v_{i,k}.$$

- **Théorème [D. '19]** : L'ensemble $\{v_{i,k} \text{ thus defined} \mid u \in \mathcal{C}_2(p, q)\}$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p, q)$.

- Ce résultat s'étend au cas où $S$ est **quasi-terminant**.

# Bases linéaires par confluence modulo

- **Théorème (Lemme des branchements critiques linéaire modulo) [D. '19]** : Si ${}_E R_E$ termine, $S$ est localement confluent modulo $E$ ssi les branchements critiques de la forme

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, equal] & v \arrow[r, dotted, "S^{*}"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u \arrow[r, "R^{*(1)}"'] & w \arrow[r, dotted, "S^{*}"'] & w'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "S^{*(1)}"] \arrow[d, "E^{\top(1)}"'] & v \arrow[r, dotted, "S^{*}"] & v' \arrow[d, dotted, "E^{\top}"] \\
u' \arrow[rr, dotted, "S^{*}"'] & & w
\end{tikzcd}
\qquad {}_E R \subseteq S
$$

sont confluents modulo $E$.

- Soit $(R, E, S)$ un $(3,2)$-polygraphe linéaire modulo, et $\mathcal{C}$ la $2$-catégorie linéaire présentée par $R \sqcup E$.

- Supposons que :
  - $E$ est convergent,
  - $S$ est **terminant**,
  - $S$ est confluent modulo $E$.

- Considérons une $2$-cellule $u \in \mathcal{C}_2(p,q)$,

$$u \overset{S^*}{\Rrightarrow} \sum \hat{u}_i, \qquad \hat{u}_i \overset{NF(E)}{\rightsquigarrow} \sum v_{i,k}.$$

- **Théorème [D. '19]** : L'ensemble $\{v_{i,k} \text{ thus defined} \mid u \in \mathcal{C}_2(p,q)\}$ est une base linéaire de $\mathcal{C}_2(p,q)$.

- Ce résultat s'étend au cas où $S$ est **quasi-terminant**.

- Réduire $u$ en $\sum \widetilde{u}_i$, où $\widetilde{u}_i$ est un monôme en quasi forme normale fixé, *i.e.* pour toute $3$-cellule $v \Rrightarrow \widetilde{u}_i$, il existe une $3$-cellule $\widetilde{u}_i \Rrightarrow v$.

## Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

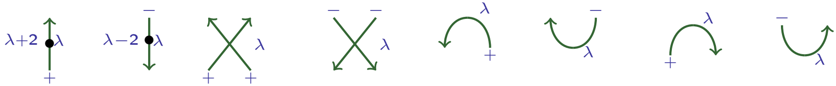
- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la $2$-catégorie linéaire définie par :

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\quad \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-, +\}\}$.

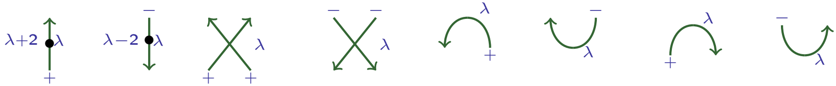
## Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ contient les 2-cellules génératrices suivantes :



# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

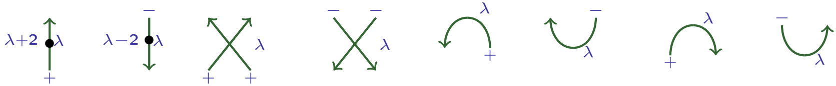
- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\quad \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ contient les 2-cellules génératrices suivantes :




- soumises aux relations :

## Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

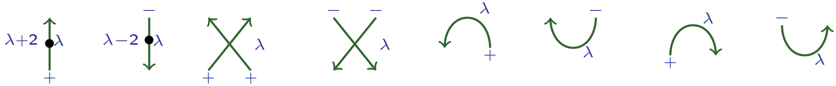
- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ contient les 2-cellules génératrices suivantes :



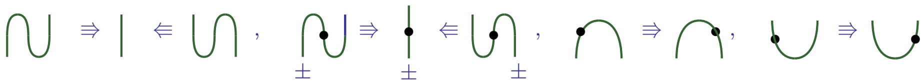

- soumises aux relations :
  - relations des algèbres KLR pour les diagrammes avec des brins orientés vers le haut,

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ contient les 2-cellules génératrices suivantes :



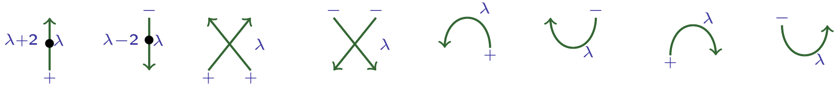

- soumises aux relations :
  - relations des algèbres KLR pour les diagrammes avec des brins orientés vers le haut,
  - axiômes pivotaux d'isotopie :



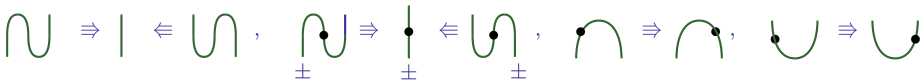

  - Relation de cyclicité pour le croisement haut.

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

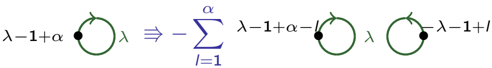
- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\quad \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ contient les 2-cellules génératrices suivantes :




- soumises aux relations :
  - relations des algèbres KLR pour les diagrammes avec des brins orientés vers le haut,
  - axiômes pivotaux d'isotopie :

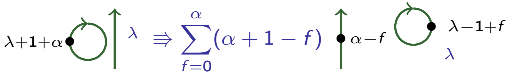



  - Relation de cyclicité pour le croisement haut.
  - Relations de bulles :

pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$ tel que $\lambda - 1 + \alpha$

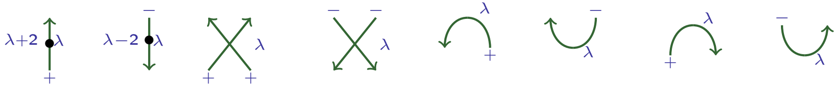
  - Relations 'Bubble slide' de la forme



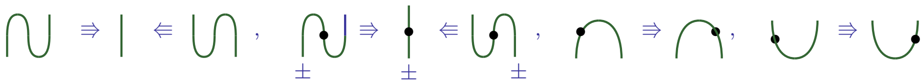

pour toute orientation de la bulle et du brin.

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

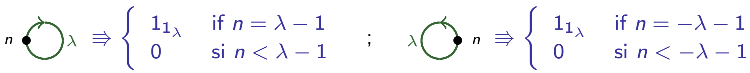
- Soit $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ la 2-catégorie linéaire définie par :
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_0 = X(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{Z}$ le réseau des poids de $\mathfrak{sl}_2$, $\quad \mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_1 = \{\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{\ell(\varepsilon)})$ avec $\varepsilon_i \in \{-,+\}\}$.
  - $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)_2$ contient les 2-cellules génératrices suivantes :

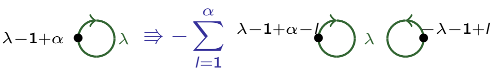



- soumises aux relations :
  - relations des algèbres KLR pour les diagrammes avec des brins orientés vers le haut,
  - axiômes pivotaux d'isotopie :



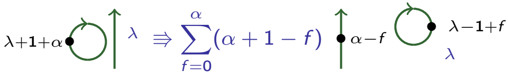

  - Relation de cyclicité pour le croisement haut.
  - Relations de bulles :




pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$ tel que $\lambda - 1 + \alpha$

  - Relations 'Bubble slide' de la forme




pour toute orientation de la bulle et du brin.

  - Autres relations: inversibilité des croisements gauche et droits, relations de $\mathfrak{sl}_2$ quantiques et relations de Coxeter pour les autres orientations.

## Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- **Théorème [D. '19, D.-Ebert-Lauda '21]** : Il existe un scindage $(R, E)$ de ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire tel que :
  - $R$ est terminant sans les bubble slides et les relations de cyclicité pour les croisements.
  - $R$ et ${}_E R$ sont quasi-terminants.
  - ${}_E R$ est confluent modulo $E$.

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- **Théorème [D. '19, D.-Ebert-Lauda '21]** : Il existe un scindage $(R, E)$ de ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire tel que :
  - $R$ est terminant sans les bubble slides et les relations de cyclicité pour les croisements.
  - $R$ et ${}_E R$ sont quasi-terminants.
  - ${}_E R$ est confluent modulo $E$.
- **Esquisse de la preuve :**
  - Dérivations sucessives pour réduire l'ensemble des $3$-cellules dont il faut prouver la terminaison.

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- **Théorème [D. '19, D.-Ebert-Lauda '21]** : Il existe un scindage $(R, E)$ de ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire tel que :
  - $R$ est terminant sans les bubble slides et les relations de cyclicité pour les croisements.
  - $R$ et ${}_E R$ sont quasi-terminants.
  - ${}_E R$ est confluent modulo $E$.
- **Esquisse de la preuve :**
  - Dérivations sucessives pour réduire l'ensemble des $3$-cellules dont il faut prouver la terminaison.
  - Procédure pour réduire toute $2$-cellule en une combinaison linéaire de $2$-cellules sur les quelles on ne peut appliquer que des cycles de 'bubble slide' et des cycles d'isotopie.

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- **Théorème [D. '19, D.-Ebert-Lauda '21]** : Il existe un scindage $(R, E)$ de ce $(3,2)$-polygraphe linéaire tel que :
  - $R$ est terminant sans les bubble slides et les relations de cyclicité pour les croisements.
  - $R$ et $_E R$ sont quasi-terminants.
  - $_E R$ est confluent modulo $E$.
- **Esquisse de la preuve :**
  - Dérivations sucessives pour réduire l'ensemble des $3$-cellules dont il faut prouver la terminaison.
  - Procédure pour réduire toute $2$-cellule en une combinaison linéaire de $2$-cellules sur les quelles on ne peut appliquer que des cycles de 'bubble slide' et des cycles d'isotopie.
  - Étude exhaustive de tous les branchements critiques modulo.

# Exemple : la 2-catégorie $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$

- **Théorème [D. '19, D.-Ebert-Lauda '21]** : Il existe un scindage $(R, E)$ de ce $(3, 2)$-polygraphe linéaire tel que :
  - $R$ est terminant sans les bubble slides et les relations de cyclicité pour les croisements.
  - $R$ et ${}_E R$ sont quasi-terminants.
  - ${}_E R$ est confluent modulo $E$.
- **Esquisse de la preuve :**
  - Dérivations sucessives pour réduire l'ensemble des $3$-cellules dont il faut prouver la terminaison.
  - Procédure pour réduire toute $2$-cellule en une combinaison linéaire de $2$-cellules sur les quelles on ne peut appliquer que des cycles de 'bubble slide' et des cycles d'isotopie.
  - Étude exhaustive de tous les branchements critiques modulo.
- **Corollaire :** Un ensemble de quasi-formes normales fixées avec source $p$ et but $q$ en forme normale relativement à $E$ et contenant :
  - pas de boucles,
  - et nombre minimal de croisements, et les relations impliquent un choix préféré pour toute configuration de la relation de Coxeter,
  - des points placés en bas des brins orientés vers le haut, en haut des brins orientés vers le bas, et sur l'intervalle le plus à droite des arcs,
  - pas de bulle de degré négatif, et toutes les bulles dans la région la plus à droit du diagramme,

  forment une base linéaire de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)(p, q)$.

Merci pour votre attention.