Sujet A

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1 Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ et F celui engendré par les vecteurs $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 2 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x\tan(2x)}.$$

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 Soient $v_1 = (0, 1, -2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_3 = (3, 2, 2, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 0)$ et $v_5 = (0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier

1. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2))$,
2. $(1, 1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4)$,
3. $\dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4)) = 1$,
4. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) + \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^4$,
5. $\mathrm{Vect}(v_4, v_5)$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Sujet B

Question de cours : Donner la démarche pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients réels constants :

$$ay'' + by' + cy = e^{mx}\left(A\cos(\omega w) + B\sin(\omega x)\right)$$

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants, quels sont ceux qui sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel ?

$$E_1 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$$

où $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues,

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \quad \text{et} \quad x + 3az = 0\}$$

pour un certain réel a (la réponse pourra dépendre de a).

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + x^6}.$$

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Considérons les polynômes

$$P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), \qquad P_1 = -X(X-2), \qquad P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$$

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Exprimer un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$R(0) = a, \quad R(1) = b, \quad R(2) = c.$$

Sujet C

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0v\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$.

Exercice 3 Pour quelles valeurs de x les vecteurs $u_1 = (x, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, x, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, x, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 1x)$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}^4$? Pour chacune de ces valeurs, déterminez la dimension du sous-espace $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Sujet A'

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1 Comparer les sous-espaces F et G suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \mathrm{Vect}((1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, 5)$$

$$G = \mathrm{Vect}((-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)).$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{e^x - \cos(x) - x}{\ln(1 + \sin(x)) - x}$$

1. Prouver que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, et calculer la limite.
2. Prouver que la fonction f prolongée par continuité en 0 par cette limite admet un DL autour de 0, et le déterminer.

Exercice 3 Soient $u_1 = (1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (-1, -5, 7)$, et $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Donner une base de E.

2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
3. Est-ce que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
4. Donner une base de $E \cap F$.

Sujet B'

Question de cours : Donner la démarche pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients réels constants :

$$ay'' + by' + cy = e^{mx} (A \cos(\omega w) + B \sin(\omega x))$$

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3.

1. Les polynômes $1, X, X(X-1)$ et $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Si oui, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 2 Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}.$$

Montrer que f admet une limite en 0, et la calculer.

Exercice 3 Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$.

Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On admettra que F est également un sous-espace.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Soit $u = (x, y, z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

Sujet C'

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \, P(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
2. Déterminer une base de E, et sa dimension.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^4}.$$

Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices *symétriques*, c'est à dire les matrices A vérifiant $A = {}^tA$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer sa dimension.
3. On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices *antisymétriques*, c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$.
   Indication : On pourra essayer de montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ en décomposant une matrice quelconque en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Sujet A

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u = (i-1, i-2, -1), \quad v = (2i, 1+4i, -i), \quad w = (0, -i-2, 2i-1)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais sont libres si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - \left(2x - \frac{1}{x}\right) y = 1 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Exercice 3 On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Pour tout $0 \leq j \leq n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_j de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_j(a_j) = 1$ et $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$.
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Sujet B

Question de cours : Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1 Pour quelles valeurs de x les vecteurs $u_1 = (x, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, x, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, x, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 1, x)$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}^4$? Pour chacune de ces valeurs, déterminez la dimension du sous-espace $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$y'' - 4y' + 4y = d(x)$$

pour une certaine fonction d.

1. Résoudre l'équation homogène.
2. Déterminer une solution particulière lorsque $d(x) = e^{2x}$.
3. Déterminer une solution particulière lorsque $d(x) = e^{-2x}$.
4. Peut-on déduire une solution particulière lorsque $d(x) = e^{2x} + e^{-2x}$?

Exercice 3 Soit n un entier naturel, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à égal à n. Pour $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme

$$P_k = X^k (1-X)^{n-k}.$$

Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sujet C

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y - 1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle.

Exercice 3 Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille libre d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Pour $k = 1, \ldots, n-1$, on pose

$$w_k = v_k + v_{k+1} \quad \text{et} \quad w_n = v_n + v_1.$$

La famille $(w_1, \ldots, w_n)$ est-elle libre ?

Sujet A'

Question de cours : Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Considérons les polynômes

$$P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), \qquad P_1 = -X(X-2), \qquad P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$$

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Exprimer un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$R(0) = a, \quad R(1) = b, \quad R(2) = c.$$

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$y' - y = x^k e^x \quad \text{sur } \mathbb{R}, \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient des réels $(a_1, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts, et la fonction $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{a_i x}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E.

Sujet B'

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3.

1. Les polynômes $1, X, X(X-1)$ et $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Si oui, exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1 \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Fixons un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et considérons pour $1 \leq k \leq n$ la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = \sin^k(x).$$

Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E. En déduire que E est de dimension infinie.

Sujet C'

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \; P(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
2. Déterminer une base de E, et sa dimension.

Exercice 2 Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$(x+1)y' + xy = (x+1)^2 \quad \text{sur }]-1, +\infty[.$$

Exercice 3 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices *symétriques*, c'est à dire les matrices A vérifiant $A = {}^tA$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer sa dimension.
3. On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices *antisymétriques*, c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Sujet Kylian FRIZZI

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u = (i-1, i-2, -1), \quad v = (2i, 1+4i, -i), \quad w = (0, -i-2, 2i-1)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais sont libres si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3 On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Pour tout $0 \leq j \leq n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_j de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_j(a_j) = 1$ et $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$.
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Sujet Théo LEGRAND

Question de cours : Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1 Pour quelles valeurs de x les vecteurs $u_1 = (x, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, x, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, x, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 1, x)$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}^4$? Pour chacune de ces valeurs, déterminez la dimension du sous-espace $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Exercice 2

1. Soit $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction. Donner la dérivée de la fonction y'^2 et y^2.
2. Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ croissante à partir d'un certain rang. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + q(x)y = 0.$$

   (a) Reformuler l'équation (E) à l'aide des dérivées calculées dans la question précédente.

   (b) Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ sont bornées en $+\infty$. On pourra pour cela utiliser la question précédente en étudiant une fonction auxiliaire.

Exercice 3 Soit n un entier naturel, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à égal à n. Pour $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme

$$P_k = X^k(1 - X)^{n-k}.$$

Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sujet Mathilde SASTRE

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y - 1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ forment une famille libre sur $\mathbb{Q}$. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la famille des $(\ln(p_i))_{i \in \{1,\dots,n\}}$ où p_i est n'importe quel nombre premier est libre sur $\mathbb{Q}$.

Sujet Thomas GAYRAL

Question de cours : Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3.

1. Les polynômes $1, X, X(X-1)$ et $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Si oui, exprimer X^2, X^3 et $X^3 - 3X$ dans cette base.

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient des réels $(a_1, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts, et la fonction $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{a_i x}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E.

Sujet Victorien JOLY

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1 Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions paires. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. On considère $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions impaires. On admettra que c'est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 2 Soit (E) l'équation différentielle définie par

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0, +\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière de (E). On note y_0 la solution trouvée.
2. On va chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$ où z est une fonction. Déterminer une équation différentielle $(E1)$ vérifiée par z.
3. Résoudre l'équation $(E1)$ sur $]0, +\infty[$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Fixons un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et considérons pour $1 \leq k \leq n$ la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = \sin^k(x).$$

Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E. En déduire que E est de dimension infinie.

Sujet Lucas LORRAIN

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les polynômes définis par

$$H_i(X) = \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^k \frac{i!}{2^k k!(i-2k)!} X^{i-2k}$$

pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ forment une base de E.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices *symétriques*, c'est à dire les matrices A vérifiant $A = {}^t A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer sa dimension.
3. On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices *antisymétriques*, c'est à dire vérifiant ${}^t A = -A$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Sujet Thomas BONNA

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1 On note $E_{\mathbb{K}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\}$.

1. Est-ce que $E_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Est-ce que $E_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1 + x)^2 y'' + (1 + x)y' - 2 = 0$ sur $] - 1, +\infty[$.

Exercice 3 On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Pour tout $0 \leq j \leq n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_j de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_j(a_j) = 1$ et $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$.
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Sujet Tim CLERC

Question de cours :

1. Donner la formule de Grassmann.
2. Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u = (i-1, i-2, -1), \quad v = (2i, 1+4i, -i), \quad w = (0, -i-2, 2i-1)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais sont libres si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

2. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles où on connait l'ensemble de solutions.
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit n un entier naturel, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à égal à n. Pour $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme

$$P_k = X^k(1-X)^{n-k}.$$

Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sujet Axel LENFANT

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E vérifiant $P(a) = 0$ et $P(b) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y - 1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle et recoller les solutions.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ forment une famille libre sur $\mathbb{Q}$. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la famille des $(\ln(p_i))_{i \in \{1,\dots,n\}}$ où p_i est n'importe quel nombre premier est libre sur $\mathbb{Q}$.

Sujet Alyssia HO

Question de cours :

1. Donner la formule de Grassmann.
2. Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3.

1. Les polynômes $1, X, X(X-1)$ et $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Si oui, exprimer X^2, X^3 et $X^3 - 3X$ dans cette base.

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient des réels $(a_1, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts, et la fonction $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{a_i x}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E.

Sujet Alec LYACHENKO

Question de cours : Soit E un espace vectoriel réel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E. En pratique, comment montrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 1 Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions paires. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. On considère $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions impaires. On admettra que c'est un sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 2 Soit (E) l'équation différentielle définie par

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,+\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière de (E). On note y_0 la solution trouvée.
2. On va chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$ où z est une fonction. Déterminer une équation différentielle $(E1)$ vérifiée par z.
3. Résoudre l'équation $(E1)$ sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3 Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Fixons un entier naturel $n \in \mathbb{N}$, et considérons pour $1 \leq k \leq n$ la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = |x - a_k|.$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre de E. En déduire que E est de dimension infinie.

Sujet Sirine YAKHOU

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les polynômes définis par

$$H_i(X) = \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^k \frac{i!}{2^k k!(i-2k)!} X^{i-2k}$$

pour $i \in \{0, \dots, n\}$ forment une base de E.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 On note $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit

$$F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0,\ f(0) = 0, f'(1) = 0\}$$

et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ où pour tout k, l'application $e_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $e_k(x) = x^k$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Sujet Thomas BONNA

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 On note $E_{\mathbb{K}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz = 0\}$.

1. Est-ce que $E_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Est-ce que $E_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Pour tout $0 \leq j \leq n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_j de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_j(a_j) = 1$ et $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$.
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Sujet Tim CLERC

Question de cours :

1. Donner la formule de Grassmann.
2. Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Montrer que les vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u = (i-1, i-2, -1), \quad v = (2i, 1+4i, -i), \quad w = (0, -i-2, 2i-1)$$

sont liés si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais sont libres si $\mathbb{C}^3$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

2. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles où on connait l'ensemble de solutions.
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit n un entier naturel, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à égal à n. Pour $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme

$$P_k = X^k(1-X)^{n-k}.$$

Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sujet Axel LENFANT

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E vérifiant $P(a) = 0$ et $P(b) = 0$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

1. Montrer que si y est une solution de l'équation différentielle précédente qui ne s'annule pas, alors $z = \dfrac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire/
2. Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y' + y - xy^2 = 0$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme premier avec P et tel que

$$\deg P + \deg Q = n + 1.$$

Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \bigoplus F_Q$.

Sujet Alyssia HO

Question de cours :

1. Donner la formule de Grassmann.
2. Soit E un espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler ce que veut dire que $E = F \oplus G$. Comment montrer ceci en pratique ?

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré ≤ 3.

1. Les polynômes $1, X, X(X-1)$ et $X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}_3[X]$?
2. Si oui, exprimer X^2, X^3 et $X^3 - 3X$ dans cette base.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y-1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle et recoller les solutions.

Exercice 3 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient des réels $(a_1, \ldots, a_n)$ deux à deux distincts, et la fonction $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{a_i x}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille libre de E.

Sujet Alec LYACHENKO

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Soit $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que $((X-\alpha_k)^n)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ forment une famille libre sur $\mathbb{Q}$. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la famille des $(\ln(p_i))_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ où p_i est n'importe quel nombre premier est libre sur $\mathbb{Q}$.

Sujet Sirine YAKHOU

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les polynômes définis par
$$H_i(X) = \sum_{k=0}^{[i/2]} (-1)^k \frac{i!}{2^k k!(i-2k)!} X^{i-2k}$$
pour $i \in \{0, \ldots, n\}$ forment une base de E.

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3 On note $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit
$$F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0,\ f(0) = 0, f'(1) = 0\}$$
et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ où pour tout k, l'application $e_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $e_k(x) = x^k$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Sujet Théo COURTOIS

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}.$$

Indication : Se ramener à une somme de Riemann.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 Soit n un entier naturel, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à égal à n. Pour $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme

$$P_k = X^k(1-X)^{n-k}.$$

Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Sujet Oriana GONZALEZ-MOSQUERA

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par $E(x)$ est le plus petit entier immédiatement inférieur à x. Par exemple, $E(1.5) = 1$ et $E(\pi) = 3$.

   Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que
$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$
2. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles où on connait l'ensemble de solutions.
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Pour tout $0 \leq j \leq n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_j de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_j(a_j) = 1$ et $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$.
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Sujet Bastien LEBAILLIF

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. *Indication :* Interpréter le $\frac{1}{2}$ comme l'intégrale d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

1. Montrer que si y est une solution de l'équation différentielle précédente qui ne s'annule pas, alors $z = \frac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire/
2. Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y' + y - xy^2 = 0$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme premier avec P et tel que

$$\deg P + \deg Q = n + 1.$$

Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \bigoplus F_Q$.

Sujet Oussama EL HANDOLI

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \mathrm{d}t.$$

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y - 1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle et recoller les solutions.

Exercice 3 On note $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit

$$F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t) \mathrm{d}t = 0,\ f(0) = 0, f'(1) = 0\}$$

et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ où pour tout k, l'application $e_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est définie par $e_k(x) = x^k$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Sujet Mohamed GHOUILA

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1

1. Calculer $\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par

$$u_n = \left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right]^{1/n}$$

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$. Montrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les polynômes définis par

$$H_i(X) = \sum_{k=0}^{[i/2]}(-1)^k \frac{i!}{2^k k!(i-2k)!} X^{i-2k}$$

pour $i \in \{0,\dots,n\}$ forment une base de E.

Sujet Nathan LERES

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}.$$

Indication : Écrire le produit ci-dessus sous la forme d'une somme.

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme premier avec P et tel que

$$\deg P + \deg Q = n + 1.$$

Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \bigoplus F_Q$.

Sujet Hippolyte CHEVALIER

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}.$$

Indication : Se ramener à une somme de Riemann.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme premier avec P et tel que

$$\deg P + \deg Q = n + 1.$$

Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \bigoplus F_Q$.

Sujet Eline FRAUD

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par $E(x)$ est le plus petit entier immédiatement inférieur à x. Par exemple, $E(1.5) = 1$ et $E(\pi) = 3$.

   Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

1. Montrer que si y est une solution de l'équation différentielle précédente qui ne s'annule pas, alors $z = \dfrac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire/
2. Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y' + y - xy^2 = 0$.

Exercice 3 On considère l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On fixe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ deux à deux distincts.

1. Pour tout $0 \leq j \leq n$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_j de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_j(a_j) = 1$ et $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$.
2. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer l'expression d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Sujet Lucie RIVIERE

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que
$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$
2. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles où on connait l'ensemble de solutions, puis recoller les solutions.
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 On note $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit

$$F = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0,\ f(0) = 0, f'(1) = 0\}$$

et $G = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ où pour tout k, l'application $e_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est définie par $e_k(x) = x^k$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Sujet Na'ilah BALA

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Indication : Interpréter le $\frac{1}{2}$ comme l'intégrale d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y-1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle et recoller les solutions.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ forment une famille libre sur $\mathbb{Q}$. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la famille des $(\ln(p_i))_{i\in\{1,\dots,n\}}$ où p_i est n'importe quel nombre premier est libre sur $\mathbb{Q}$.

Sujet Sirine DIF

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par

$$u_n = \left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right]^{1/n}$$

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soit $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ une famille de polynômes tels que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$. Montrer que la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les polynômes définis par

$$H_i(X) = \sum_{k=0}^{[i/2]}(-1)^k \frac{i!}{2^k k!(i-2k)!}X^{i-2k}$$

pour $i \in \{0,\dots,n\}$ forment une base de E.

Sujet Fatoumata MAGASSA

Question de cours : Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $ay' + by = c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}.$$

Indication : Écrire le produit ci-dessus sous la forme d'une somme.

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire la dimension de F_P en fonction du degré de P.
3. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme premier avec P et tel que

$$\deg P + \deg Q = n + 1.$$

Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = F_P \bigoplus F_Q$.

Sujet Jeanne ARMAND-HASSELWEILER

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\displaystyle\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

Indication : Se ramener à une somme de Riemann.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y-1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle et recoller les solutions.

Exercice 3 On considère $\mathbb{R}^3$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sa base canonique. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer $u(x, y, z)$ pour $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$. u est-il injectif ?
3. u est-il surjectif ?
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
5. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Sujet Jalila BELOUAHRI

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par $E(x)$ est le plus petit entier immédiatement inférieur à x. Par exemple, $E(1.5) = 1$ et $E(\pi) = 3$.

   Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)\mathrm{d}x$.

2. Calculer la limite de la suite u_n définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Calculer $f(b)$ et $f(c)$, et en déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Sujet Matthieu KLAAS

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. *Indication :* Interpréter le $\frac{1}{2}$ comme l'intégrale d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

1. Montrer que si y est une solution de l'équation différentielle précédente qui ne s'annule pas, alors $z = \frac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire/
2. Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y' + y - xy^2 = 0$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $p^2 = p \circ p = \text{Id}_E$.
On pose $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E. (On montrerait de même que E_2 en est un.)
2. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
3. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
   Indication : On pourra montrer que tout x de E s'écrit comme la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

Sujet Sebti BRAHIMI

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

2. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles où on connait l'ensemble de solutions.
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit f un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire une application linéaire telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Sujet Lila CHAPELON

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par

$$u_n = \left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right]^{1/n}$$

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définir par $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire le rang de f.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Sujet Lou-Anne SALLET

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{1/n}.$$

Indication : Écrire le produit ci-dessus sous la forme d'une somme.

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit une application linéaire $u : E \to E$ par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
4. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Sujet Xavier DESSENS

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right).$$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2xyy' - y^2 = x^2$ sur $]0, +\infty[$. *Indication :* On pourra poser $z = y^2$ et résoudre l'équation différentielle d'inconnue z.
2. $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit p l'application de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$p(x, y, z) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z).$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$, $p(e_3)$ puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$. Que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$, et montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux. (Id est l'application identité $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x$.)
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$.

Sujet Hamza HOCINE

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par $E(x)$ est le plus petit entier immédiatement inférieur à x. Par exemple, $E(1.5) = 1$ et $E(\pi) = 3$.

   Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)\mathrm{d}x$.

2. Calculer la limite de la suite u_n définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + y = 0$. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.

Indication : On pourra par exemple s'intéresser à la fonction z définie par $z(x) = y(e^x)$ pour y solution de (E).

Exercice 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Calculer $f(b)$ et $f(c)$, et en déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Sujet Gais PICOUT

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 On cherche à déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x(x-1)y' - (3x-1)y + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes a et b telles que
$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$
2. Résoudre l'équation homogène sur chacun des intervalles où on connait l'ensemble de solutions.
3. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $p^2 = p \circ p = \mathrm{Id}_E$.
On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E. (On montrerait de même que E_2 en est un.)
2. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
3. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
Indication : On pourra montrer que tout x de E s'écrit comme la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

Sujet Yahya AIT-ABDELLAH-OUALI

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. *Indication :* Interpréter le $\frac{1}{2}$ comme l'intégrale d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle suivante avec a et b deux fonctions continues

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = 0.$$

1. Montrer que si y est une solution de l'équation différentielle précédente qui ne s'annule pas, alors $z = \frac{1}{y}$ est solution d'une équation différentielle linéaire/
2. Déterminer les solutions ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ de $y' + y - xy^2 = 0$.

Exercice 3 Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^4$.
4. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\mathrm{Ker}(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$.

Sujet Youn NOH

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. Calculer $\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par

$$u_n = \left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right]^{1/n}$$

Exercice 2 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f'(x)$ et résoudre l'équation différentielle satisfaite par f.

Exercice 3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3,\ u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3,\ u(e_3) = 3f_1 - f_3,\ u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. Déterminer l'image par u d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Déterminer le rang de u, et une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Sujet Killian RANCON

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (k+n)^{1/n}.$$

Indication : Écrire le produit ci-dessus sous la forme d'une somme.

Exercice 2 On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' = |y - 1|$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. Supposons que y_p est une solution de cette équation, que pouvez-vous dire sur la monotonie de y_p ?
2. Résoudre l'équation différentielle dans les deux cas suivants : si y est telle que $y(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, et si y est telle que $y(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
3. Quelles sont les solutions possibles dans le cas où il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $y(x_0) = 1$.
   Indication : Distinguer le cas de la fonction constante égale à 1, ensuite essayer de raisonner intervalle par intervalle et recoller les solutions.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit une application linéaire $u : E \to E$ par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Sujet Nicolas CARRIER

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Soit $I_n = \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right).$$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans E. Montrer que :

i) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $n = 2\mathrm{rg}(f)$.

ii) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 3 Soit p l'application de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$p(x, y, z) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z).$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$, $p(e_3)$ puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$. Que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id})$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$, et montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux. (Id est l'application identité $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto x$.)
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$.

Sujet Louis GINANE

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ définie par $E(x)$ est le plus petit entier immédiatement inférieur à x. Par exemple, $E(1.5) = 1$ et $E(\pi) = 3$.

   Soient $m, n \in \mathbb{Z}^2$ avec $n \geq m$. Calculer $\displaystyle\int_m^n E(x)\mathrm{d}x$.

2. Calculer la limite de la suite u_n définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Calculer $f(b)$ et $f(c)$, et en déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}_{n+1}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n + 1$. On définit une application linéaire f sur E par

$$f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Pour $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f, et leurs dimensions.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X + 1) - P_n(X) = X^n$.

Sujet Clara THEUILLON

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E tel que $p^2 = p \circ p = \mathrm{Id}_E$.
On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E. (On montrerait de même que E_2 en est un.)
2. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
3. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
   Indication : On pourra montrer que tout x de E s'écrit comme la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et u l'application linéaire définie par

$$u(P) = \frac{1}{2}(1 - X^2)P'' + XP' - P.$$

1. Montrer que u est bien un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base (P_1, P_2) de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Déterminer P_3 tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(P_3)$.
4. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de E.
5. Déterminer la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3).

Sujet Ethan LE-TRUNG

Question de cours : Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)] - \int f'(t)g(t)dt.$$

Calculer une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, alors il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. *Indication :* Interpréter le $\frac{1}{2}$ comme l'intégrale d'une fonction judicieusement choisie.

Exercice 2 Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4).$$

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^4$.
4. Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\mathrm{Ker}(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$, et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme Q tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}.$$

Déterminer quel est ce polynôme Q pour $P = X^2 + X$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Sujet Axel MILIONI

Question de cours : Soient E et F deux applications linéaires. Définir ce qu'est une application linéaire de E dans F.

En pratique, comment montrer qu'une application f donnée est linéaire ?

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} x|x|\mathrm{d}x$.
2. Calculer la limite de la suite u_n définie par

$$u_n = \left[\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)\right]^{1/n}$$

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2. Soit ψ l'endomorphisme de E défini par $\psi(A) = A - {}^tA$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\psi)$, et donner sa dimension.
3. Déterminer l'image de ψ. En déduire que pour toute matrice $A \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une matrice J à déterminer tel que $\psi(A) = J$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E. Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u(x, y, z) = (y - 2z, 2x - y + 4z, x - y + 3z).$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$, et une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que la réunion des deux bases obtenues est une base $\mathcal{B}'$ de E.
4. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

Sujet Matthieu SEREK

Question de cours : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Démontrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}.$$

Indication : Écrire le produit ci-dessus sous la forme d'une somme.

Exercice 2 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
3. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit une application linéaire $u : E \to E$ par

$$u(P) = P + (1-X)P'.$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.