Sujet A

Question de cours : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$. Que veut-dire que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\mathrm{t}dt$$

est convergente, puis absolument convergente ? Quel est le lien entre les deux notions ? **Bonus :** Donnez un contre exemple d'une fonction qui vérifie l'une des deux propriétés mais pas l'autre.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ou divergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1}\mathrm{d}t$$

Exercice 1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Calculer $f(b)$ et $f(c)$, et en déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 3 Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\mathrm{d}x$$

converge et calculer I_n dans ce cas.

Sujet B

Question de cours : Soit $a > 0$. Á quelle condition sur le réel λ l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda} \mathrm{d}t$$

est-elle convergente ?

Exercice 1 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A de l'application f dans cette base canonique.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2 Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)\sqrt{x}}$$

1. Montrer que I est convergente.
2. **Bonus :** Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4}$. *Indication : on pourra essayer de décomposer en éléments simples.*
3. En déduire I.

Sujet C

Question de cours : Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1 + t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit f un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire une application linéaire telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{id} - f$ est aussi un projecteur, où id est l'application linéaire telle que $x \mapsto x$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - f) = \mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

1. Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3 + 1)^n}$ converge.
2. **Bonus :** Calculer J_1
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a

$$J_{n+1} = \frac{3n - 1}{3n} J_n$$

   et en déduire J_n pour $n \geq 1$.

Sujet A'

<u>**Question de cours :**</u> Soit $a > 0$. Á quelle condition sur le réel λ l'intégrale

$$\int_0^a \frac{1}{t^\lambda} \mathrm{d}t$$

est-elle convergente ?

<u>**Exercice 1**</u> L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ou divergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} \mathrm{d}t$$

<u>**Exercice 1**</u> Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $R_2[X]$.
5. Déterminer la matrice de passage de P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
6. Comment obtient-on la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

<u>**Exercice 3**</u> Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^n} \mathrm{d}x$$

converge et calculer I_n dans ce cas.

Sujet B'

Question de cours : Qu'est-ce qu'une permutation de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$? Combien y a-t-il d'éléments dans S_n ?

Listez les éléments de S_3 en indiquant pour chaque élément de quel type de permutation il s'agit.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A de l'application f dans cette base canonique.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3

1. Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^n}$ converge.
2. **Bonus :** Calculer J_1
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a
$$J_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} J_n$$
et en déduire J_n pour $n \geq 1$.

Sujet C'

Question de cours : Énoncer l'inégalité de Cauchy-Scharz pour des intégrales.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ou divergente ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel et f,$g : E \to E$ deux applications linéaires telles que $g \circ f \circ g = f$ et $f \circ g \circ f = g$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$
2. Montrer que $\mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f = E$

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} \mathrm{d}t$$
converge, puis avec le changement de variable $u = 1/t$, montrer qu'elle vaut 0.
2. **Bonus :** Soit $a > 0$, calculer
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} \mathrm{d}t.$$

Sujet A

Question de cours : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b[$. Que veut-dire que l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\mathrm{t}dt$$

est convergente, puis absolument convergente ? Quel est le lien entre les deux notions ? **Bonus :** Donnez un contre exemple d'une fonction qui vérifie l'une des deux propriétés mais pas l'autre.

Exercice 1 La série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est la valeur de $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P - (X-2)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (1, X-2, (X-2)^2)$ est une base de $R_2[X]$.
5. Déterminer la matrice de passage de P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
6. Comment obtient-on la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 3 Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}\mathrm{d}x$$

converge et calculer I_n dans ce cas.

Sujet B

Question de cours : Soit $a > 0$. Á quelle condition sur le réel λ l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda} \mathrm{d}t$$

est-elle convergente ? Donnez en la preuve. A quelle condition la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\lambda}$ est-elle convergente ?

Exercice 1 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A de l'application f dans cette base canonique.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2 Soit

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)\sqrt{x}}$$

1. Montrer que I est convergente.
2. **Bonus :** Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4}$. *Indication : on pourra essayer de décomposer en éléments simples.*
3. En déduire I.

Sujet C

Question de cours : Donnez la formule permettant de calculer le déterminant d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1 + t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit f un projecteur de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire une application linéaire telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{id} - f$ est aussi un projecteur, où id est l'application linéaire telle que $x \mapsto x$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - f) = \mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

1. Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^3 + 1)^n}$ converge.
2. **Bonus :** Calculer J_1
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a

$$J_{n+1} = \frac{3n - 1}{3n} J_n$$

   et en déduire J_n pour $n \geq 1$.

Sujet A'

Question de cours : Soit a un réel. À quelle condition la série de terme général a^n est elle convergente ? Dans ce cas, que vaut la somme $\sum_0^\infty a^n$.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ou divergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$. Soit $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. Calculer $f(b)$ et $f(c)$, et en déduire que $\{b, c\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 3 Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x^n} \mathrm{d}x$$

converge et calculer I_n dans ce cas.

Sujet B'

Question de cours : Enoncer la formule de l'inverse d'une matrice en fonction de la comatrice.

Exercice 1 L'intégrale impropre suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1 + t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 2 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A de l'application f dans cette base canonique.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire le rang de f, une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 3

1. Etudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^3 + 1)^n}$ converge.
2. **Bonus :** Calculer J_1
3. Montrer que si $n \geq 2$, on a
$$J_{n+1} = \frac{3n - 1}{3n} J_n$$
et en déduire J_n pour $n \geq 1$.

Sujet C'

<u>**Question de cours :**</u> A quelle condition un système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & \lambda_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & \lambda_2 \\ \ldots & & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & \lambda_n \end{array}\right.$$

Comment trouver la solution en utilisant les formules de Kramer ?

<u>**Exercice 1**</u> La série de terme général $\dfrac{1}{2^n}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est la valeur de $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

<u>**Exercice 2**</u> Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$ une application linéaire. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(**i**) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
(**ii**) $f \circ f = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.

<u>**Exercice 3**</u>

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
converge, puis avec le changement de variable $u = 1/t$, montrer qu'elle vaut 0.
2. **Bonus :** Soit $a > 0$, calculer
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\mathrm{d}t.$$

Sujet A

Question de cours :

1. Soit a un réel. À quelle condition la série de terme général a^n est elle convergente ? Dans ce cas, que vaut la somme $\sum_0^{\infty} a^n$.
2. Soit $a > 0$. Prouver que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ est convergente.

Exercice 1 Soient a et b des réels, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 2

1. La série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$ est-elle convergente ?
2. La série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ pour $n > 1$ est-elle convergente ?

Exercice 3 Soit σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoint.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. **Bonus :** Calculer σ^{100}.

Sujet B

Question de cours : Soit $\lambda > 0$. A quelle condition sur λ la série de terme général $\frac{1}{n^\lambda}$ est-elle convergente ? Le prouver.

Exercice 1

1. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$
2. En déduire la valeur de
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$, donner selon la valeur de a la nature de la série de terme général $\frac{n!}{n^{an}}$.

Exercice 3

Soit σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoint.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. **Bonus :** Calculer σ^{100}.

Sujet C

Question de cours : Énoncer la règle de d'Alembert pour étudier la convergence de séries, et la démontrer.

Exercice 1 Soient a,b,c et d des réels. Montrer que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

vaut $1+a+b+c$, sans le développer.

Exercice 2 Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$,
2. $v_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoint.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. **Bonus :** Calculer σ^{2001}.

Sujet A

Question de cours :

1. Soit a un réel. À quelle condition la série de terme général a^n est elle convergente ? Dans ce cas, que vaut la somme $\sum_0^\infty a^n$.
2. Soit $a > 0$. Prouver que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ est convergente.

Exercice 1 Soient a,b et c des réels, calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 2

1. La série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$ est-elle convergente ?
2. La série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ pour $n \geq 2$ est-elle convergente ?

Exercice 3 Soit σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoint.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. **Bonus :** Calculer σ^{100}.

Sujet B

Question de cours :

1. Soit $a > 0$. A quelle condition sur a la série de terme général $\frac{1}{n^a}$ est-elle convergente ?
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Définir une valeur propre, un vecteur propre et un espace propre associé à f. Que pouvez-vous dire de particulier sur les espaces propres ?

Exercice 1

1. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$
2. En déduire la valeur de
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$, donner selon la valeur de a la nature de la série de terme général $\frac{n!}{n^{an}}$.

Exercice 3 Soit σ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoint.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. **Bonus :** Calculer σ^{100}.

Sujet C

Question de cours :

1. Énoncer la règle de d'Alembert pour étudier la convergence de séries à termes positifs.
2. Définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme/d'une matrice. **Bonus :** Connaissez-vous certains coefficients de ce polynôme ? Quel est le lien entre ce polynôme et les valeurs propres de l'endomorphisme/la matrice ?

Exercice 1 Soient a et b des réels, calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} \text{ et en déduire } D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

Exercice 2 Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$,
2. $v_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 3 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer σ en produit de cycles à support disjoint.
2. Donner la signature de σ.
3. Décomposer σ en produit de transpositions.
4. **Bonus :** Calculer σ^{2001}.

Sujet A

Question de cours :

1. Soit a un réel. À quelle condition la série de terme général a^n est elle convergente ? Dans ce cas, que vaut la somme $\sum_0^\infty a^n$.
2. Soit $a > 0$. Prouver que la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$ est convergente.

Exercice 1 Soit a un réel, on note Δ_n le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \dots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Exercice 2

1. La série de terme général $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$ est-elle convergente ?
2. La série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$ pour $n \geq 2$ est-elle convergente ?

Sujet B

Question de cours :

1. Soit $a > 0$. A quelle condition sur a la série de terme général $\frac{1}{n^a}$ est-elle convergente ?
2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Définir une valeur propre, un vecteur propre et un espace propre associé à f. Que pouvez-vous dire de particulier sur les espaces propres ?

Exercice 1

1. Calculer le déterminant
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$
2. On définit, pour $n \geq 1$:
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$
Montrer que $\forall n \geq 1, D_{n+2} = D_n$. En déduire D_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}$, donner selon la valeur de a la nature de la série de terme général $\frac{n!}{n^{an}}$.

Sujet C

Question de cours :

1. Énoncer la règle de d'Alembert pour étudier la convergence de séries à termes positifs.
2. Définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme/d'une matrice. **Bonus :** Connaissez-vous certains coefficients de ce polynôme ? Quel est le lien entre ce polynôme et les valeurs propres de l'endomorphisme/la matrice ?

Exercice 1

1. Soient a,b, c et d des réels, calculer sous forme factorisée le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$$

2. Soient a et b des réels, calculer le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} \text{ et en déduire } D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}_n$$

Exercice 2 Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$,
2. $v_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Sujet A

Question de cours : Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Donnez toutes les conditions nécessaires et suffisantes que vous connaissez pour que u soit diagonalisable.

Exercice 1 Donner les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

1. Soif f l'application de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on a $|f(x,y)| \leq 4\sqrt{x^2+y^2}$ et en déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

   f admet-elle une limite en $(0,0)$?

Exercice 3 Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que $u \circ v = v \circ u$, montrer que u et v ont au moins un vecteur propre commun.

Sujet B

Question de cours :

1. Définir ce qu'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Expliquer pourquoi une boule fermée n'est pas un ouvert.
2. Donner la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 1 Donner les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

Exercice 3 Vrai ou Faux :

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres.
2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de vecteurs propres.
3. Si une matrice A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
4. Si une matrice est telle que A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
5. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
6. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Sujet C

Question de cours : Définir ce qu'est une valeur propre d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Définir les multiplicités algébriques et géométriques d'une valeur propre.

Comment les comparer ? Que pouvez-vous dire de la somme des multiplicités ?

Exercice 1 Expliquer sans aucun calcul pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$.

Exercice 3 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u,v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
2. Supposons que u est un projecteur, c'est à dire $u \circ u = u$. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.

Sujet L. BERTHELOT

Exercice 1 : Les fonctions suivantes admettent-elles une limite ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$ en $(1,0)$.

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Sans calculer le polynôme caractéristique ni les valeurs propres de A, déterminer si A est diagonalisable.

Exercice 3 : Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Sujet C. CASSAIGNE

Exercice 1 : Donner les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 3 Vrai ou Faux :

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres.
2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de vecteurs propres.
3. Si une matrice A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
4. Si une matrice est telle que A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
5. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
6. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Sujet F. DHEURLE

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2 : On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{xy - 2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. f est-elle prolongeable par continuité en le ou les points de $\mathbb{R}^2$ où elle n'est pas définie ?

Exercice 3 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0.
2. Déterminer deux autres vecteurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.
   Indication : Regarder la somme de toutes les lignes, puis la somme "alternée" de toutes les lignes, c'est à dire $L_1 - L_2 + L_3 - L_4$ ...

Sujet M. ANDRUSZAK

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$$

est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable, et donner une matrice P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2 - y^2 + z^2}$$

est-elle prolongeable par continuité en $(2,-2,0)$?

Sujet L. PIEDEBOUT

Exercice 1 : Les fonctions suivantes admettent-elles une limite ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ en $(0,0)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(2,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$ en $(2,0)$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 : Sans faire aucun calcul, déterminer si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Sujet T. VOISIN

Exercice 1 : Donner les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en $(0,0)$?

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$.

Exercice 3 : Vrai ou Faux :

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres.
2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de vecteurs propres.
3. Si une matrice A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.
4. Si une matrice est telle que A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
5. Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire admet au moins une valeur propre.
6. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Sujet B. GUILLEMARE

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 2 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$$

est-elle prolongeable par continuité en $(0,0,0)$?

Sujet T. KOSAK

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer le polynôme caractéristique ni les valeurs propres de A, déterminer si A est diagonalisable.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}$$

est-elle prolongeable par continuité en $(1,0)$?

Sujet L. LABROSSE

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2 : Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0.
2. Déterminer deux autres vecteurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.
   Indication : Regarder la somme de toutes les lignes, puis la somme "alternée" de toutes les lignes, c'est à dire $L_1 - L_2 + L_3 - L_4$ ...

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(2x-2y)}{x-y}$$

est-elle prolongeable par continuité sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$?

Sujet C. COULOT

Exercice 1 : Les fonctions suivantes admettent-elles une limite ?

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$ en $(0,0)$.

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer le polynôme caractéristique ni les valeurs propres de A, déterminer si A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 3 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Sujet A. FAVRE-REGUILLON

Exercice 1 : Donner les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 3 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0.
2. Déterminer deux autres vecteurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.
   Indication : Regarder la somme de toutes les lignes, puis la somme "alternée" de toutes les lignes, c'est à dire $L_1 - L_2 + L_3 - L_4$ ...

Sujet S. FREW

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}.$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. f est-elle prolongeable par continuité en le ou les points de $\mathbb{R}^2$ où elle n'est pas définie ?

Exercice 2 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Vrai ou Faux :

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres.
2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de vecteurs propres.
3. Si une matrice A est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
4. Si une matrice A est diagonalisable, alors A^n est diagonalisable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Si une matrice est telle que A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
6. Si une matrice A est diagonalisable, alors il existe B telle que $A = B^2$.
7. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Sujet A. AZOURI

Exercice 1 : La fonction f définie par définie par

$$f(x,y) = \frac{x + y}{x^2 - y^2 + z^2}$$

est-elle prolongeable par continuité en $(2,-2,0)$?

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable, et donner une matrice P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Sujet J. LENIS CARDONA

Exercice 1 : Sans faire aucun calcul, déterminer si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Sujet A. LETO

Exercice 1 : Donner les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : Les fonctions suivantes admettent-elles une limite

1. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$?
2. $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$ en $(1,0)$?

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire que f est diagonalisable.
   Indication : Regarder f dans une base de E composée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Sujet R. GENTY

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?
3. Calculer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 2 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Exercice 3 : Vrai ou Faux :

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de valeurs propres.
2. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un nombre fini de vecteurs propres.
3. Si une matrice A est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
4. Si une matrice A est diagonalisable, alors A^n est diagonalisable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Si une matrice est telle que A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.
6. Si une matrice A est diagonalisable, alors il existe B telle que $A = B^2$.
7. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Sujet N. PURICELLI

Exercice 1 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer le polynôme caractéristique ni les valeurs propres de A, déterminer si A est diagonalisable.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 2 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Sujet T. VERBRUGGE

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}$ est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Exercice 2 : Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0.
2. Déterminer deux autres vecteurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.
   Indication : Regarder la somme de toutes les lignes, puis la somme "alternée" de toutes les lignes, c'est à dire $L_1 - L_2 + L_3 - L_4$ ...

Exercice 3 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Sujet A. DELESCLUSE

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer le polynôme caractéristique ni les valeurs propres de A, déterminer si A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx)$.

Sujet A. GONZALEZ

Exercice 1 : On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n.

Exercice 2 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $f_n(x)$. On note $f(x)$ la limite de cette suite, lorsqu'elle existe.
2. Est-ce que (f_n) converge uniformément vers f sur $]-1,1[$?
3. Soit $a \in]0,1[$, est-ce que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$?

Sujet L. MOURGUES

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f.
2. Converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 3 : Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à 0.
2. Déterminer deux autres vecteurs propres de A, en déduire que A est diagonalisable.
   Indication : Regarder la somme de toutes les lignes, puis la somme "alternée" de toutes les lignes, c'est à dire $L_1 - L_2 + L_3 - L_4$ ...

Sujet M. CAUCHY

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est diagonalisable, et donner une matrice P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x - \dfrac{\sin(nx)}{nx}$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\cos(nx)$.

Sujet H. ERUAM

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 :

1. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas C^1.
2. Soit la suite de fonctions f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f. Vérifier que f est dérivable, et montrer que la suite (f_n') ne converge pas simplement.

Sujet L. PADE

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ sur $[0, +\infty[$,
2. $g_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Sujet B. BRIGUET

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n.

Sujet J. DEGRANGE

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|} \sin(nx)$.

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P'.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Sujet A. ISSAD

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x - \dfrac{\sin(nx)}{nx}$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|} \cos(nx)$.

Sujet L. BOIVIN

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx)$.

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Pour ces valeurs, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.

Sujet M. COHN

Exercice 1 : On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Si oui, déterminer quels sont les sous-espaces propres associés à A.
3. Calculer $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n.

Exercice 2 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $f_n(x)$. On note $f(x)$ la limite de cette suite, lorsqu'elle existe.
2. Est-ce que (f_n) converge uniformément vers f sur $]-1,1[$?
3. Soit $a \in]0,1[$, est-ce que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$?

Sujet S. VAN GINNEKEN

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 y^2 \ln(x^2+y^2)$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f.
2. Converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 3 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f, et déterminer des vecteurs propres associés.
2. Soit u un vecteur propre associé à 2, trouver des vecteurs v et w tels que

$$f(v) = 2v + u \quad \text{et} \quad f(w) = 2w + v.$$

3. Soit e un vecteur propre associé à 1, démontrer que (e,u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^4$, et donner la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Sujet G. ADENOR

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$$

est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x - \dfrac{\sin(nx)}{nx}$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|} \cos(nx)$.

Sujet C. BEAL

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P' - XP''.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 :

1. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas C^1.
2. Soit la suite de fonctions f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f. Vérifier que f est dérivable, et montrer que la suite (f_n') ne converge pas simplement.

Sujet N. DUBOIS

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ sur $[0, +\infty[$,
2. $g_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$ sur $[0,1]$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Diagonaliser la matrice
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sujet M. COPPIN

Exercice 1 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $g_n(x) = n^2xe^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable, et trouver une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, et calculer P^{-1}.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle déterminée par u_0,u_1 et la relation de récurrence

$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, et en déduire une expression de u_n en fonction de u_0 et u_1 pour tout $n \geq 2$.

Sujet H. GROS

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx)$.

Exercice 3 : Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$. Déterminer une base des sous-espaces propres de A, en déduire que A est diagonalisable et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sujet S. NARANJO RINCON

Exercice 1 : La fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Diagonaliser la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f_n(x) = x - \dfrac{\sin(nx)}{nx}$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\cos(nx)$.

Sujet T. BRUN

Exercice 1 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$,
2. $g_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P' - XP''.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Pour ces valeurs, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.

Sujet T EL AZZOUZI

Exercice 1 : On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. Calculer $(A - 2I_3)^2$, puis $(A - 2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire A^n.

Exercice 2 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $f_n(x)$. On note $f(x)$ la limite de cette suite, lorsqu'elle existe.
2. Est-ce que (f_n) converge uniformément vers f sur $]-1, 1[$?
3. Soit $a \in]0, 1[$, est-ce que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$?

Sujet A. MAITRE

Exercice 1 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^2$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^3$.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^2$.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si} x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t.$$
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$ pour $a > 0$?

Exercice 3 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f, et déterminer des vecteurs propres associés.
2. Soit u un vecteur propre associé à 2, trouver des vecteurs v et w tels que
$$f(v) = 2v + u \quad \text{et} \quad f(w) = 2w + v.$$
3. Soit e un vecteur propre associé à 1, démontrer que (e, u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^4$, et donner la matrice de f dans cette base.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Sujet A. DELOBEL

Exercice 1 : Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 2 : Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?

4. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{n}{1+(x+1)n}$ sur $[0,1]$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx)$.

Sujet M. HADI

Exercice 1 : Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $AM + MA = 0$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n$ et soit f l'endomorphisme de E définie par
$$f(P) = X(X-1)P' - 2nXP.$$
Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 :

1. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$. Montrer que chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas C^1.
2. Soit la suite de fonctions f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f. Vérifier que f est dérivable, et montrer que la suite (f_n') ne converge pas simplement.

Sujet A. ZOUHIR

Exercice 1 : Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^2$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^3$.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^2$.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ sur $[0, +\infty[$,
2. $g_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$ sur $[0,1]$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Diagonaliser la matrice
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sujet C. DURAND

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soit f l'endomorphisme de E définie par
$$f(P) = P - (X+1)P' - XP''.$$
Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : Soit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable, et trouver une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, et calculer P^{-1}.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle déterminée par u_0,u_1 et la relation de récurrence
$$u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2.$$
On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, et en déduire une expression de u_n en fonction de u_0 et u_1 pour tout $n \geq 2$.

Sujet M. PIROIRD

Exercice 1 : Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $AM + MA = 0$.

Exercice 2 : Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ sur $[0, 1]$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|} \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$. Déterminer une base des sous-espaces propres de A, en déduire que A est diagonalisable et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sujet C. ROLLET

Exercice 1 : Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Diagonaliser la matrice
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $[-1, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer f_n' et étudier la convergence simple de la suite (f_n') sur $[-1, 1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1, 1]$ par
$$g_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2x^2)}{2n^2}.$$
Montrer que (g_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.

Sujet M. GAYE

Exercice 1 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{n}{1+(x+1)n}$ sur $[0,1]$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx)$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soit f l'endomorphisme de E définie par

$$f(P) = P - (X+1)P' - XP''.$$

Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit une suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0, u_1 et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n.$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Pour ces valeurs, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.

Sujet K. JAIET

Exercice 1 : On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les puissances de la matrice $A - I_3$.
2. Déterminer le polynôme minimal de la matrice A.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Justifier que A^{-1} existe, et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A.
2. Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$.

Exercice 3 : Considérons la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0,n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n).

Sujet V. LEVESY

__Exercice 1 :__ Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^2$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^3$.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Alors il existe une matrice B telle que $A = B^2$.

__Exercice 2 :__ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t.$$
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$ pour $a > 0$?

__Exercice 3 :__ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à 1 est de dimension 1, et en déterminer un vecteur non nul u.
3. Trouver un vecteur v tel que $f(v) = u + v$.
4. Déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre 2. Montrer qu (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, et calculer la matrice B de f dans la basze (u, v, w).
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en déduire B^k.
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Sujet J. AMROUCHE

__Exercice 1 :__ Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

__Exercice 2 :__ Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A sous forme factorisée.
2. Déterminer les sous-espaces propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?
4. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 3 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$,
2. $g_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$ sur $[0, 1]$.

Sujet M. DIOP

Exercice 1 : Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $AM + MA = 0$.

Exercice 2 : Trigonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) sur $[-1, 1]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer f_n' et étudier la convergence simple de la suite (f_n') sur $[-1, 1]$.
3. On considère la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[-1, 1]$ par

$$g_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2x^2)}{2n^2}.$$

Montrer que (g_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction nulle.

Sujet L. NGUYEN HUU

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.

Peut-on trouver une matrice C qui vérifie $C^2 = A$?

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = xe^{\frac{x}{n}}$ sur $[0, +\infty[$,
2. $g_n(x) = \dfrac{nx}{nx + 1}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 3 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Diagonaliser la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sujet E. BADR

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et soit f l'endomorphisme de E définie par
$$f(P) = P - (X+1)P' - XP''.$$
Justifier que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 : Soit
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable, et trouver une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de A.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, et calculer P^{-1}.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes u_0, v_0 et w_0 et la relation de récurrence
$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
On note U_n le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et de A, et en déduire une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Sujet H. COURNAULT

Exercice 1 : Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités algébriques.
2. Montrer que si $a \neq 0$, alors A n'est pas diagonalisable.
3. On suppose $a = 0$. Déterminer une base des sous-espaces propres de A, en déduire que A est diagonalisable et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n+x}$ sur $[0, 1]$,
2. $g_n(x) = e^{-n|x|} \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer le polynôme minimal de A.
4. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Sujet E. JIMENEZ

Exercice 1 : Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Exercice 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un projecteur de E, c'est à dire $f \circ f = f$.

1. Montrer que les valeurs propres possibles de f sont 0 où 1.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, et en déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que f est diagonalisable.
4. Diagonaliser la matrice
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2x}{nx^2 + e^{-n}}$.

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonction (f_n).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I := \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?