

Représentation de Burau et algèbre de Hecke

Benjamin Dupont

Groupe de travail sur les groupes de tresses

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

14 Avril 2021

Références

- ▶ *Quantum invariants: a study of knots, 3-manifolds and their sets*, Tomotada Ohtsuki, 2001.
- ▶ *An introduction to knot theory*, Raymond Lickorish, 1997.
- ▶ *Braids : A Survey*, Birman-Brendle, arXiv:math/0409205.

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n - 1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n - 1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n - 1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n - 1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.
- ▶ Burau a introduit en 1936 une représentation du groupe de tresses, qui a été plus tard interprétée comme une déformation de la représentation standard de \mathcal{S}_n . On définit $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par

$$\sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i+1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n-1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n-1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.
- ▶ Burau a introduit en 1936 une représentation du groupe de tresses, qui a été plus tard interprétée comme une déformation de la représentation standard de \mathcal{S}_n . On définit $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par

$$\sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

- ▶ On a $\rho = \rho_1 \oplus \bar{\rho}$ où $\bar{\rho}$ est une représentation irréductible $B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ de dimension $n-1$, appelée **représentation de Burau réduite** définie par

$$\sigma_i \mapsto I_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-2}$$

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i+1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n-1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto l_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n-1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.
- ▶ Burau a introduit en 1936 une représentation du groupe de tresses, qui a été plus tard interprétée comme une déformation de la représentaton standard de \mathcal{S}_n . On définit $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par

$$\sigma_i \mapsto l_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-1}$$

- ▶ On a $\rho = \rho_1 \oplus \bar{\rho}$ où $\bar{\rho}$ est une représentation irréductible $B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ de dimension $n-1$, appelée **représentation de Burau réduite** définie par

$$\sigma_i \mapsto l_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-2}$$

- ▶ **Théorème (cf Birman, Ohstuki)** : Soit b une tresse. Alors on a

$$\Delta_{c(b)}(t) \sim \frac{\det(\bar{\rho}(b) - l_{n-1})}{1 + t + \dots + t^{n-1}}.$$

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

- ▶ Une **présentation finie** d'un module M sur un anneau commutatif R est une suite exacte

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$$

où E et F sont des R -modules libres de rang fini.

- ▶ Les images $\beta(e_i)$ correspondent aux générateurs, les images $\alpha(f_j)$ aux relations.
- ▶ Si $\alpha(f_j) = \sum_j A_{i,j} e_j$, alors A est une **matrice de présentation** de M .

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

- ▶ Une **présentation finie** d'un module M sur un anneau commutatif R est une suite exacte

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$$

où E et F sont des R -modules libres de rang fini.

- ▶ Les images $\beta(e_i)$ correspondent aux générateurs, les images $\alpha(f_j)$ aux relations.
 - ▶ Si $\alpha(f_j) = \sum_j A_{i,j} e_j$, alors A est une **matrice de présentation** de M .
- ▶ **Rappel** : Le polynôme d'Alexander repose sur une matrice de Seifert M définie à partir de $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert telle que $\partial(F) = L$.

$$M_{i,j} = \text{lk}(e_i^+, e_j) \quad \text{où } (e_1, e_n) \text{ est une base de } H_1(F).$$

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

- ▶ Une **présentation finie** d'un module M sur un anneau commutatif R est une suite exacte

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$$

où E et F sont des R -modules libres de rang fini.

- ▶ Les images $\beta(e_i)$ correspondent aux générateurs, les images $\alpha(f_j)$ aux relations.
 - ▶ Si $\alpha(f_i) = \sum_j A_{i,j} e_j$, alors A est une **matrice de présentation** de M .
- ▶ **Rappel** : Le polynôme d'Alexander repose sur une matrice de Seifert M définie à partir de $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert telle que $\partial(F) = L$.

$$M_{i,j} = \text{lk}(e_i^+, e_j) \quad \text{où } (e_1, e_n) \text{ est une base de } H_1(F).$$

- ▶ Pour une surface de Seifert F d'un entrelacs L , les groupes $H_1(S^3 - F)$ et $H_1(F)$ sont isomorphes, et il existe une unique forme bilinéaire non-dégénérée

$$\beta : H_1(S^3 - F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d).$$

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

- ▶ Une **présentation finie** d'un module M sur un anneau commutatif R est une suite exacte

$$F \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \rightarrow 0$$

où E et F sont des R -modules libres de rang fini.

- ▶ Les images $\beta(e_i)$ correspondent aux générateurs, les images $\alpha(f_j)$ aux relations.
 - ▶ Si $\alpha(f_i) = \sum_j A_{i,j} e_j$, alors A est une **matrice de présentation** de M .
- ▶ **Rappel** : Le polynôme d'Alexander repose sur une matrice de Seifert M définie à partir de $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert telle que $\partial(F) = L$.

$$M_{i,j} = \text{lk}(e_i^+, e_j) \quad \text{où } (e_1, e_n) \text{ est une base de } H_1(F).$$

- ▶ Pour une surface de Seifert F d'un entrelacs L , les groupes $H_1(S^3 - F)$ et $H_1(F)$ sont isomorphes, et il existe une unique forme bilinéaire non-dégénérée

$$\beta : H_1(S^3 - F) \times H_1(F) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \beta([c], [d]) = \text{lk}(c, d).$$

- ▶ Si (e_1, \dots, e_n) est une base de $H_1(F)$ et (f_1, \dots, f_n) est la base duale pour β de $H_1(S^3 - F)$, alors

$$e_i^- = \sum_j M_{i,j} f_j, \quad e_j^+ = \sum_i M_{i,j} f_j$$

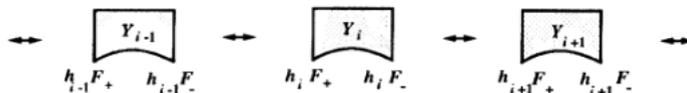
pour une matrice de Seifert M .

- ▶ La représentation de Burau peut se retrouver par $H_1(F_\infty)$ où $F_\infty := \widetilde{S^3 - L}$ est le recouvrement cyclique infini de $S^3 - L$.

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

► F_∞ est défini comme suit:

- Soit Y la 3-variété obtenue en coupant $S^3 - L$ le long de F , compactifiée. On a comme sections F^+ et F^- dans la frontière de M .
- Soient $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des copies de Y , et F_i^\pm les copies de F_\pm dans Y_i . F_∞ est obtenu par la réunion des Y_i en recollant F_i^+ et F_{i+1}^- .

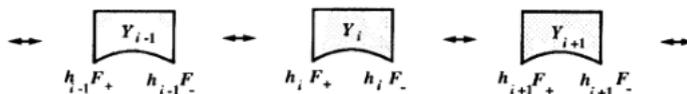


- t agit sur $\widetilde{S^3 - L}$ en envoyant Y_i sur Y_{i+1} , donc $H_1(F_\infty)$ est un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module.

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

► F_∞ est défini comme suit:

- Soit Y la 3-variété obtenue en coupant $S^3 - L$ le long de F , compactifiée. On a comme sections F^+ et F^- dans la frontière de M .
- Soient $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des copies de Y , et F_i^\pm les copies de F_\pm dans Y_i . F_∞ est obtenu par la réunion des Y_i en recollant F_i^+ et F_{i+1}^- .



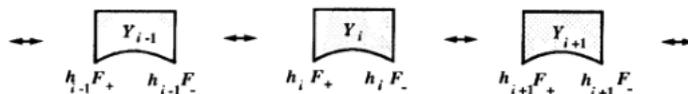
► t agit sur $\widetilde{S^3 - L}$ en envoyant Y_i sur Y_{i+1} , donc $H_1(F_\infty)$ est un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module.

► **Théorème** : Soit F une surface de Seifert d'un entrelacs L , et M une matrice de Seifert. Alors $tM - {}^tM$ est une matrice de présentation de $H_1(F_\infty)$.

Matrices de Seifert et recouvrements infinis

► F_∞ est défini comme suit:

- Soit Y la 3-variété obtenue en coupant $S^3 - L$ le long de F , compactifiée. On a comme sections F^+ et F^- dans la frontière de M .
- Soient $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des copies de Y , et F_i^\pm les copies de F_\pm dans Y_i . F_∞ est obtenu par la réunion des Y_i en recollant F_i^+ et F_{i+1}^- .



► t agit sur $\widetilde{S^3 - L}$ en envoyant Y_i sur Y_{i+1} , donc $H_1(F_\infty)$ est un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module.

► **Théorème** : Soit F une surface de Seifert d'un entrelacs L , et M une matrice de Seifert. Alors $tM - {}^tM$ est une matrice de présentation de $H_1(F_\infty)$.

► **Esquisse de preuve** :

► Soit $F_\infty = Y' \cup Y''$ où $Y' = \bigcup_i Y_{2i+1}$, $Y'' = \bigcup_i Y_{2i}$.

► On a une suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow C_n(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_n} C_n(Y') \oplus C_n(Y'') \xrightarrow{\beta_n} C_n(F_\infty)$$

► Via le théorème de Mayer-Vietoris :

$$\cdots \longrightarrow H_1(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_1(Y') \oplus H_1(Y'') \xrightarrow{\beta_*} H_1(F_\infty) \longrightarrow H_0(Y' \cap Y'') \xrightarrow{\alpha_*} H_0(Y') \oplus H_0(Y'')$$

► $H_0(Y' \cap Y'') \simeq \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(F)$, $H_0(Y') \oplus H_0(Y'') \simeq \mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(Y)$, et on montre que sur $H_0(Y' \cap Y'')$, α_* est injective et β_* est surjective.

► Idem avec les H_1 , $H_1(Y' \cap Y'')$ a pour base $\{1 \otimes e_i\}$ et $H_1(Y') \oplus H_1(Y'')$ a pour base $\{1 \otimes f_j\}$ et alors

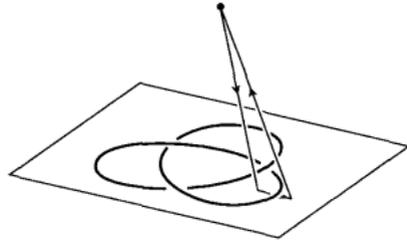
$$\alpha_*(1 \otimes e_i) = \sum_j (-M_{i,j}(1 \otimes f_j) + M_{j,i}(t \otimes f_j)).$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si b est une tresse, on va calculer $H_1(\widetilde{S^3 - c(b)})$. On fixe un point de base p dans \mathbb{R}^3 .

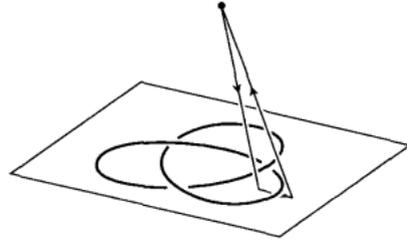
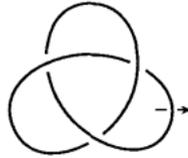


- ▶ **Notation :**



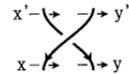
Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si b est une tresse, on va calculer $H_1(S^3 - c(b))$. On fixe un point de base p dans \mathbb{R}^3 .



- ▶ **Notation :**

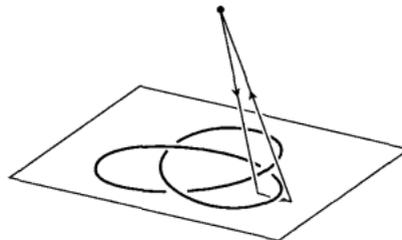
- ▶ Autour d'un croisement de $c(b)$, on a 4 cycles x, y, x', y' de $H_1(S^3 - L)$:
 $y' = x, x' + y' = x + y$ dans $H_1(S^3 - L)$.



qui sont reliés par

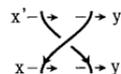
Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si b est une tresse, on va calculer $H_1(S^3 - c(b))$. On fixe un point de base p dans \mathbb{R}^3 .



▶ **Notation :**

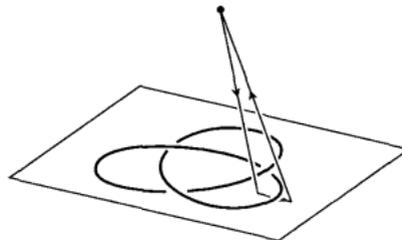
- ▶ Autour d'un croisement de $c(b)$, on a 4 cycles x, y, x', y' de $H_1(S^3 - L)$: $y' = x, x' + y' = x + y$ dans $H_1(S^3 - L)$.
- ▶ Soit p_i la copie de p dans Y_i , on relève un cycle x en un cycle $x_i \in Y_i \cup Y_{i+1}$, qui est un chemin de p_i à p_{i+1} , idem pour les autres cycles:



$$y'_i = x_i, \quad x'_i + y'_{i+1} = x_i + y_{i+1}$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si b est une tresse, on va calculer $H_1(S^3 - \widetilde{c}(b))$. On fixe un point de base p dans \mathbb{R}^3 .



- ▶ **Notation :**

- ▶ Autour d'un croisement de $c(b)$, on a 4 cycles x, y, x', y' de $H_1(S^3 - L)$: $y' = x, x' + y' = x + y$ dans $H_1(S^3 - L)$.



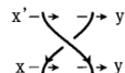
- ▶ Soit p_i la copie de p dans Y_i , on relève un cycle x en un cycle $x_i \in Y_i \cup Y_{i+1}$, qui est un chemin de p_i à p_{i+1} , idem pour les autres cycles:

$$y'_i = x_i, \quad x'_i + y'_{i+1} = x_i + y_{i+1}$$

- ▶ L'action de t est donnée par $t \cdot x_i = x_{i+1}$, et donc

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

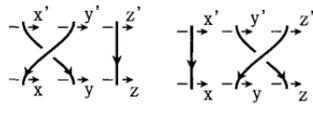
- ▶ Idem pour les 4 cycles x, y, x', y' autour d'un croisement négatif:



$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- **Exemple** : Si on considère des tresses à trois brins, on a 6-cycles autour des générateurs 'positifs' σ_1 et σ_2 :



$$\sim \sim \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

donc ${}^t(x'_i \ y'_i \ z'_i) = \phi_3(b)^t(x_i \ y_i \ z_i)$.

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- **Exemple** : Si on considère des tresses à trois brins, on a 6-cycles autour des générateurs 'positifs' σ_1 et σ_2 :

$$\sim \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

donc ${}^t(x'_i \ y'_i \ z'_i) = \phi_3(b)^t(x_i \ y_i \ z_i)$.

- Si on clôt la tresse b , on doit rajouter des relations entre les cycles $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i$ et $z_i = z'_i$.

$$\sim (I - \phi_3(b)) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- **Exemple** : Si on considère des tresses à trois brins, on a 6-cycles autour des générateurs 'positifs' σ_1 et σ_2 :

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

donc ${}^t(x'_i \ y'_i \ z'_i) = \phi_3(b)^t(x_i \ y_i \ z_i)$.

- Si on clôt la tresse b , on doit rajouter des relations entre les cycles $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i$ et $z_i = z'_i$.

$$(I - \phi_3(b)) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

- Soit $\Delta = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta/(1-t^3) \rightarrow (\Delta/(1-t)) \oplus \left(\widehat{\Delta^3}/(I - \widehat{\phi}_3(b))\widehat{\Delta^3} \right) \rightarrow H_1(\widetilde{S^3 - L}) \rightarrow 0$$

où $\widehat{\Delta^3}$ est un sous-espace de Δ^3 de codimension 1 (correspondant à l'espace vectoriel associé à la représentation de Burau réduite).

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- **Exemple** : Si on considère des tresses à trois brins, on a 6-cycles autour des générateurs 'positifs' σ_1 et σ_2 :

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

donc ${}^t(x'_i \ y'_i \ z'_i) = \phi_3(b)^t(x_i \ y_i \ z_i)$.

- Si on clôt la tresse b , on doit rajouter des relations entre les cycles $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i$ et $z_i = z'_i$.

$$(I - \phi_3(b)) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

- Soit $\Delta = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta/(1-t^3) \rightarrow (\Delta/(1-t)) \oplus (\widehat{\Delta^3}/(I - \widehat{\phi_3}(b))\widehat{\Delta^3}) \rightarrow H_1(\widetilde{S^3 - L}) \rightarrow 0$$

où $\widehat{\Delta^3}$ est un sous-espace de Δ^3 de codimension 1 (correspondant à l'espace vectoriel associé à la représentation de Burau réduite).

- Le polynôme d'Alexander $\Delta_L(t)$ est le déterminant d'une matrice de Seifert associée à $H_1(F)$, qui est une matrice de présentation de $H_1(\widetilde{S^3 - L})$, donc

$$\Delta_L(t) = c \frac{1-t}{1-t^3} \det(I - \widehat{\phi_3}(b)) \quad \text{où } c \text{ est une unité de } \Delta.$$

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.

Algèbres de Hecke

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.
- ▶ Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1 - t)x + t$.
- ▶ Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, 1987: étude des représentations $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ avec deux valeurs propres distinctes.

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.
- ▶ Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1 - t)x + t$.
- ▶ Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, 1987: étude des représentations $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ avec deux valeurs propres distinctes.
- ▶ L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ est une déformation de l'algèbre $\mathbb{C}[S_n]$ présentée par
 - ▶ générateurs x_i pour $1 \leq i \leq n - 1$,
 - ▶ relations

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \quad x_i^2 = (t - 1)x_i + t, \quad x_i x_k = x_k x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ et } |i - k| > 1.$$

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.
- ▶ Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1 - t)x + t$.
- ▶ Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, 1987: étude des représentations $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ avec deux valeurs propres distinctes.
- ▶ L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ est une déformation de l'algèbre $\mathbb{C}[S_n]$ présentée par
 - ▶ générateurs x_i pour $1 \leq i \leq n - 1$,
 - ▶ relations

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \quad x_i^2 = (t - 1)x_i + t, \quad x_i x_k = x_k x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ et } |i - k| > 1.$$

- ▶ Considérons $f : B_n \rightarrow H_n(t)$, $\sigma_i \mapsto x_i$, f n'est pas un homomorphisme, et n'est pas stable par les mouvements de Markov.
- ▶ **Idée** : $B_n \xrightarrow{f} H_n(t) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{C}$ assure d'être stable par M2.

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.
- ▶ Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1-t)x + t$.
- ▶ Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, 1987: étude des représentations $\rho : B_n \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ avec deux valeurs propres distinctes.

▶ L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ est une déformation de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ présentée par

- ▶ générateurs x_i pour $1 \leq i \leq n-1$,
- ▶ relations

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \quad x_i^2 = (t-1)x_i + t, \quad x_i x_k = x_k x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } |i-k| > 1.$$

▶ Considérons $f : B_n \rightarrow H_n(t)$, $\sigma_i \mapsto x_i$, f n'est pas un homomorphisme, et n'est pas stable par les mouvements de Markov.

▶ **Idée** : $B_n \xrightarrow{f} H_n(t) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathbb{C}$ assure d'être stable par M2.

▶ **Théorème (Ocneanu, H-O-M-F-L-Y '1985)** : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe une unique fonction $\mathrm{tr} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$, où $\mathbf{H} = \bigcup_{n \geq 0} H_n(t)$ vérifiant:

- ▶ $\mathrm{tr}(1) = 1$,
- ▶ $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$,
- ▶ tr est \mathbb{C} -linéaire,
- ▶ $\mathrm{tr}(ux_{n-1}v) = z \mathrm{tr}(uv)$ pour $u, v \in H_{n-1}$.

▶ **Remarque** : \mathbf{H} peut-être interprétée comme une 2-catégorie linéaire, et dans ce cas l'application trace correspond bien à l'idée de fermer le diagramme sur le droit en collant les extrémités des brins. (cf [arXiv:1806.06873](https://arxiv.org/abs/1806.06873))

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

► Pour tout tresse b , on peut calculer $\text{tr}(f(b))$ par les axiômes ci-dessus. **Exemple :** Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$\begin{aligned}\text{tr}(f(b)) &= \text{tr}(x_1^3) = \text{tr}(((t-1)x_1 + t)x_1) = (t-1)\text{tr}(x_1^2) + t\text{tr}(x_1) \\ &= (t-1)\text{tr}((t-1)x_1 + t) + zt \\ &= (t-1)^2z + t(t-1) + zt = z(t^2 - t + 1) + t(t-1)\end{aligned}$$

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- Pour tout tresse b , on peut calculer $\text{tr}(f(b))$ par les axiômes ci-dessus. **Exemple** : Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$\begin{aligned}\text{tr}(f(b)) &= \text{tr}(x_1^3) = \text{tr}(((t-1)x_1 + t)x_1) = (t-1)\text{tr}(x_1^2) + t\text{tr}(x_1) \\ &= (t-1)\text{tr}((t-1)x_1 + t) + zt \\ &= (t-1)^2z + t(t-1) + zt = z(t^2 - t + 1) + t(t-1)\end{aligned}$$

- Cependant, cette fonction ne permet pas de définir un invariant de nœuds puisqu'elle n'est pas stable par les mouvements M2: $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$.
- On va tordre cette trace: supposons qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\text{tr}(kx_i) = \text{tr}((kx_i)^{-1})$, alors

$$k^2 = \frac{1+z-t}{tz} \Rightarrow z = -\frac{1-t}{1-k^2t}.$$

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- Pour tout tresse b , on peut calculer $tr(f(b))$ par les axiômes ci-dessus. **Exemple :** Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$\begin{aligned}tr(f(b)) &= tr(x_1^3) = tr(((t-1)x_1 + t)x_1) = (t-1)tr(x_1^2) + ttr(x_1) \\ &= (t-1)tr((t-1)x_1 + t) + zt \\ &= (t-1)^2z + t(t-1) + zt = z(t^2 - t + 1) + t(t-1)\end{aligned}$$

- Cependant, cette fonction ne permet pas de définir un invariant de nœuds puisqu'elle n'est pas stable par les mouvements M2: $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$.

- On va tordre cette trace: supposons qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $tr(kx_i) = tr((kx_i)^{-1})$, alors

$$k^2 = \frac{1+z-t}{tz} \Rightarrow z = -\frac{1-t}{1-k^2t}.$$

- On pose $\kappa = k^2$ et $f_\kappa : B_n \rightarrow H_n(t)$ par $f_\kappa(\sigma_i) = \sqrt{\kappa}\sigma_i$. Du coup,

$$tr(f_\kappa(\sigma_n)) = -\sqrt{\kappa} \frac{1-t}{1-\kappa t}$$

- On veut définir $F : B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est invariante par M2, or:

$$tr(f(b \cdot \sqrt{\kappa}\sigma_n)) = -\sqrt{\kappa} \frac{1-t}{1-\kappa t} tr(f(b)) = tr(f(b \cdot \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sigma_n^{-1}))$$

donc on définit

$$F(b) = F_b(t, \kappa) = \left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1-\kappa t}{1-t}\right)^{n-1} tr(f_\kappa(b)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1-\kappa t}{1-t}\right)^{n-1} (\sqrt{\kappa})^{w(b)} tr(f(b)).$$

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.
- ▶ Si on pose $l = \sqrt{\kappa}t^{1/2}$ et $m = t^{1/2} - t^{-1/2}$, on obtient un polynôme de Laurent P dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$. On vérifie que ce polynôme de Laurent vérifie la relation écheveau

$$mP_{L_0}(l, m) = l^{-1}P_{L_+}(l, m) - lP_{L_-}(l, m)$$

et donc on retrouve le polynôme HOMFLY-PT.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.
- ▶ Si on pose $l = \sqrt{\kappa}t^{1/2}$ et $m = t^{1/2} - t^{-1/2}$, on obtient un polynôme de Laurent P dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$. On vérifie que ce polynôme de Laurent vérifie la relation écheveau

$$mP_{L_0}(l, m) = l^{-1}P_{L_+}(l, m) - lP_{L_-}(l, m)$$

et donc on retrouve le polynôme HOMFLY-PT.

- ▶ **Exemple** : Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$F_b(t, \kappa) = \kappa(1 + t^2 - \kappa t^2) = \kappa t \left(2 - \kappa t + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 \right)$$

et donc $P_b(l, m) = 2l^2 - l^4 + l^2m^2$.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.
- ▶ Si on pose $l = \sqrt{\kappa}t^{1/2}$ et $m = t^{1/2} - t^{-1/2}$, on obtient un polynôme de Laurent P dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$. On vérifie que ce polynôme de Laurent vérifie la relation écheveau

$$mP_{L_0}(l, m) = l^{-1}P_{L_+}(l, m) - lP_{L_-}(l, m)$$

et donc on retrouve le polynôme HOMFLY-PT.

- ▶ **Exemple :** Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$F_b(t, \kappa) = \kappa(1 + t^2 - \kappa t^2) = \kappa t \left(2 - \kappa t + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 \right)$$

et donc $P_b(l, m) = 2l^2 - l^4 + l^2m^2$.

- ▶ Lien avec les polynômes d'Alexander et de Jones:

$$\Delta_L(t) = P_L(1, t^{1/2} - t^{-1/2}) \quad V_L(t) = P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2}).$$