

Invariants de noeuds via représentations des groupes de tresses

Benjamin Dupont

Groupe de travail sur les groupes de tresses

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

7 Avril 2021

Plan

I. Le polynôme de Jones

II. Lien entre nœuds et groupes de tresses

III. Représentations des groupes de tresses

IV. Invariants via des représentations d'algèbres

Nœuds, invariants et polynôme d'Alexander

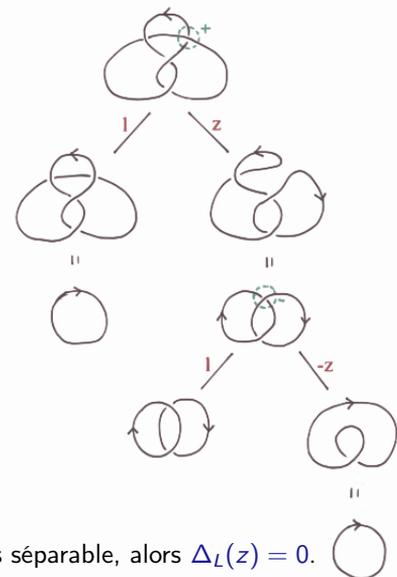
- ▶ On a défini des nœuds et entrelacs, la notion d'équivalence entre deux nœuds, ainsi que les premiers invariants de coloriage (Fox '60).
- ▶ On a défini le premier invariant polynômial: le **polynôme d'Alexander** ('1920), qui est un polynôme de Laurent $\in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$.

- ▶ Via une matrice de Seifert construite à partir de $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert qui engendre l'entrelacs.

- ▶ Via une **relation écheveau**:

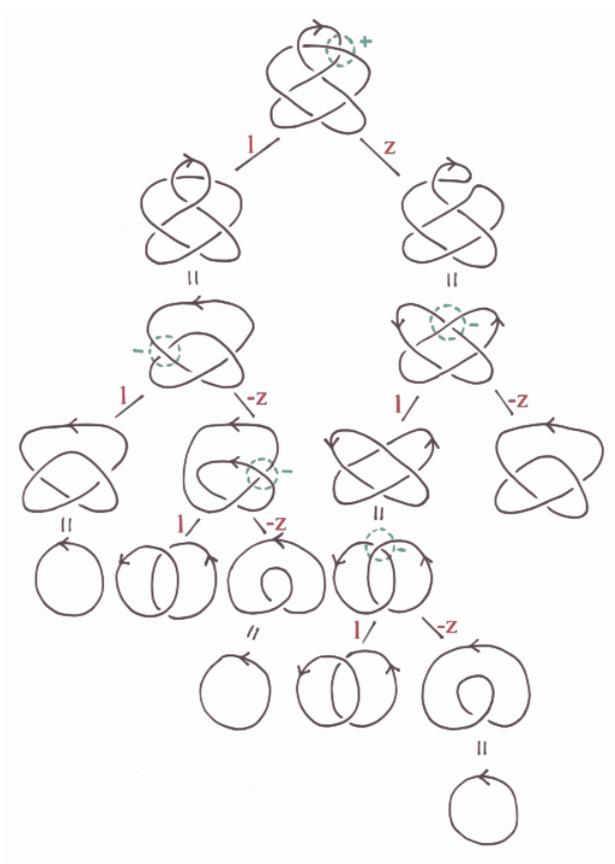
$$\Delta_{L_+}(x) - \Delta_{L_-}(x) = (x^{-1} - x)\Delta_{L_0}(x).$$

- ▶ On retrouve alors le polynôme de Conway. **Exemple** : pour le nœud 4_1 ,



- ▶ **Théorème** : Si L est un entrelacs séparable, alors $\Delta_L(z) = 0$.

Un autre exemple



$$\Delta(6_2) = 1(1 - z(0 - z)) + z(1(0 - z) - z(1 - z(0 - z))) = 1 - z^2 - z^4.$$

I. Le polynôme de Jones

- ▶ Invariant découvert par Jones en 1984, en étudiant des algèbres d'opérateurs. N'est pas relié à la topologie de dimension 3.
- ▶ Depuis la découverte de Jones, cela donné à de nouvelles perspectives, créant la **topologie quantique**.
- ▶ C'est un invariant beaucoup plus puissant que les précédents. Il permet notamment de distinguer des nœuds de leurs miroirs.
- ▶ On va utiliser l'approche utilisée par Kauffman, développé un an après Jones, plus simple.

Le crochet de Kauffman

► Soit A une indéterminée. Le **crochet de Kauffman** d'un entrelacs non-orienté L est un polynôme de Laurent $\in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ défini par les règles récursives suivantes:

► C'est invariant par isotopie plane de diagrammes.

► Il satisfait la relation écheveau (locale) suivante:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{right parenthesis} \rangle + A^{-1} \langle \text{left parenthesis} \rangle$$

► Il satisfait $\langle D \sqcup 0_1 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$, où \sqcup désigne un entrelacs à deux composantes disjointes.

► Il satisfait la condition $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

Le crochet de Kauffman

► Soit A une indéterminée. Le **crochet de Kauffman** d'un entrelacs non-orienté L est un polynôme de Laurent $\in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ défini par les règles récursives suivantes:

► C'est invariant par isotopie plane de diagrammes.

► Il satisfait la relation écheveau (locale) suivante:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{parallel right} \rangle + A^{-1} \langle \text{parallel left} \rangle$$

► Il satisfait $\langle D \sqcup 0_1 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$, où \sqcup désigne un entrelacs à deux composantes disjointes.

► Il satisfait la condition $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

► **Exemples :**

► $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})$.

► $\langle \text{figure-eight} \rangle = A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \text{figure-eight} \rangle = A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$.

► $\langle \text{figure-eight} \rangle = A \langle \text{figure-eight} \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}$.

Le crochet de Kauffman

- ▶ Soit A une indéterminée. Le **crochet de Kauffman** d'un entrelacs non-orienté L est un polynôme de Laurent $\in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ défini par les règles récursives suivantes:

- ▶ C'est invariant par isotopie plane de diagrammes.
- ▶ Il satisfait la relation écheveau (locale) suivante:

$$\langle \text{Diagramme à croisement} \rangle = A \langle \text{Diagramme à arc droit} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagramme à arc gauche} \rangle$$

- ▶ Il satisfait $\langle D \sqcup 0_1 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$, où \sqcup désigne un entrelacs à deux composantes disjointes.
- ▶ Il satisfait la condition $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

Exemples :

- ▶ $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})$.
- ▶ $\langle \text{Nœud de huit} \rangle = A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \text{Nœud de huit inversé} \rangle = A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$.
- ▶ $\langle \text{Nœud de huit inversé} \rangle = A \langle \text{Nœud de huit} \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}$.

- ▶ Le crochet de Kauffmann n'est pas un invariant d'entrelacs: les deux derniers exemples sont équivalents au nœud trivial et n'ont pas le même crochet.

- ▶ Il n'est pas stable par Reidemeister 1:

$$\langle \text{Diagramme R1 positif} \rangle = A \langle \text{Diagramme R1 positif simplifié} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagramme R1 positif inversé} \rangle = (-A^3) \langle \text{Diagramme R1 positif simplifié} \rangle$$

$$\langle \text{Diagramme R1 négatif} \rangle = A \langle \text{Diagramme R1 négatif simplifié} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagramme R1 négatif inversé} \rangle = (-A^{-3}) \langle \text{Diagramme R1 négatif simplifié} \rangle$$

Le crochet de Kauffmann

- Il est stable par Reidemeister 2 et 3:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A^2 \langle \text{crossing with two crossings} \rangle + \langle \text{crossing with one crossing} \rangle + A^{-2} \langle \text{crossing with two crossings} \rangle = \langle \text{crossing with two crossings} \rangle$$

Le crochet de Kauffmann

- Il est stable par Reidemeister 2 et 3:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A^2 \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-2} \langle \text{negative crossing} \rangle$$

- **Exemple** : Pour le nœud de trèfle à gauche:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{left trefoil} \rangle &= A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle \\
 &= A \left[A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle \right] + A^{-1} \left[A \langle \text{positive crossing} \rangle + A^{-1} \langle \text{negative crossing} \rangle \right] \\
 &= A^2 (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{link} \rangle + 1 \langle \text{link} \rangle + 1 \langle \text{link} \rangle + A^{-2} \langle \text{link} \rangle \\
 &= A^7 + A^3 - A^{-5}
 \end{aligned}$$

Le crochet de Kauffmann

- ▶ Il est stable par Reidemeister 2 et 3:

$$\langle \text{crossing} \rangle = A^2 \langle \text{resolution 1} \rangle + \langle \text{resolution 2} \rangle + A^{-2} \langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{resolution 1} \rangle$$

- ▶ **Exemple** : Pour le nœud de trèfle à gauche:

$$\begin{aligned} \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{resolution 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{resolution 2} \rangle \\ &= A \left[A \langle \text{resolution 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{resolution 2} \rangle \right] + A^{-1} \left[A \langle \text{resolution 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{resolution 2} \rangle \right] \\ &= A^2 (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{link} \rangle + 1 \langle \text{link} \rangle + 1 \langle \text{link} \rangle + A^{-2} \langle \text{link} \rangle \\ &= A^7 + A^3 - A^{-5} \end{aligned}$$

- ▶ Le crochet est 'bien défini', *i.e.*, il ne dépend pas de l'ordre choisi des croisements sur lesquels on applique la relation écheveau.
- ▶ Soit D un diagramme d'entrelacs. Un **état** est donné par le choix d'un signe $+1$ où -1 pour chaque croisement de D . Si D a c croisements, il y a 2^c états. Etant donné un état s , on forme un diagramme sD obtenu en lissant les croisements comme ceci:

$$\langle \text{crossing} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{positive smoothing} \rangle \quad \text{if } +1 \quad \text{or} \quad \langle \text{negative smoothing} \rangle \quad \text{if } -1.$$

- ▶ **Théorème** : $\langle D \rangle = \sum_{s \in \text{St}(D)} A^{\sum s} (-A^2 - A^{-2})^{|sD| - 1}$ où $|sD|$ est le nombre de boucles disjointes de sD .

Le polynôme de Jones

- ▶ Si D est un diagramme d'entrelacs orienté, notons $w(D)$ la quantité $\sum_{c \in C_D} \varepsilon(c)$ où C_D est l'ensemble des croisements de D .
 - ▶ Contrairement à $\text{lk}(D)$, pas de $\frac{1}{2}$ et on compte les croisements entre une composante et elle-même.
- ▶ $w(D)$ est invariant par $R2$ et $R3$, et est mutiplié par ± 1 par $R1$.

Le polynôme de Jones

- ▶ Si D est un diagramme d'entrelacs orienté, notons $w(D)$ la quantité $\sum_{c \in C_D} \varepsilon(c)$ où C_D est l'ensemble des croisements de D .
 - ▶ Contrairement à $\text{lk}(D)$, pas de $\frac{1}{2}$ et on compte les croisements entre une composante et elle-même.
- ▶ $w(D)$ est invariant par $R2$ et $R3$, et est mutiplié par ± 1 par $R1$.
- ▶ **Théorème** : Le polynôme de Laurent $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ est un invariant d'entrelacs orienté.
- ▶ Le **polynôme de Jones** est défini par $V_L(t) = f_D(t^{-1/4})$ où D est un diagramme de L , autrement dit:

$$V_L(t) = (-t^{-3/4})^{-w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/4}].$$

Le polynôme de Jones

► Si D est un diagramme d'entrelacs orienté, notons $w(D)$ la quantité $\sum_{c \in C_D} \varepsilon(c)$ où C_D est l'ensemble des croisements de D .

► Contrairement à $\text{lk}(D)$, pas de $\frac{1}{2}$ et on compte les croisements entre une composante et elle-même.

► $w(D)$ est invariant par $R2$ et $R3$, et est mutiplié par ± 1 par $R1$.

► **Théorème** : Le polynôme de Laurent $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ est un invariant d'entrelacs orienté.

► Le **polynôme de Jones** est défini par $V_L(t) = f_D(t^{-1/4})$ où D est un diagramme de L , autrement dit:

$$V_L(t) = (-t^{-3/4})^{-w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/4}].$$

► **Théorème** : Le polynôme de Jones satisfait

► C'est un invariant d'entrelacs orienté, et il vit dans $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$.

► Le polynôme de Jones du nœud trivial est 1.

► Il satisfait la relation écheveau

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$$

où L_+, L_- et L_0 sont trois diagrammes d'entrelacs qui diffèrent localement par



Exemples de polynômes de Jones

- **Exemple** : On peut calculer le polynôme de Jones d'un entrelacs trivial à deux composantes avec la relation écheveau:

$$t^{-1}V_t(\text{link}) - tV_t(\text{link}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\text{link})$$

et donc $V_t(\text{link}) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

Exemples de polynômes de Jones

- **Exemple** : On peut calculer le polynôme de Jones d'un entrelacs trivial à deux composantes avec la relation écheveau:

$$t^{-1}V_t(\text{link}) - tV_t(\text{link}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\text{two circles})$$

et donc $V_t(\text{two circles}) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un entrelacs de Hopf:

$$L_+ : \text{link} \quad L_- : \text{link} \quad L_0 : \text{link}$$

donc $t^{-1}V_t(\text{link}) - t(-t^{1/2} - t^{-1/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\text{link})$, d'où $V_t(\text{link}) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

Exemples de polynômes de Jones

- **Exemple** : On peut calculer le polynôme de Jones d'un entrelacs trivial à deux composantes avec la relation écheveau:

$$t^{-1}V_t(\infty) - tV_t(\infty) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\bigcirc\bigcirc)$$

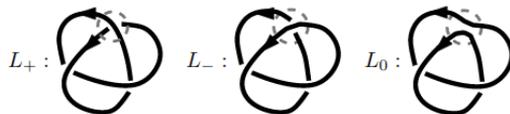
et donc $V_t(\bigcirc\bigcirc) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un entrelacs de Hopf:



donc $t^{-1}V_t(\bigcirc\bigcirc) - t(-t^{1/2} - t^{-1/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\bigcirc\bigcirc)$, d'où $V_t(\bigcirc\bigcirc) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un nœud de trèfle à droite:



donc $t^{-1}V_t(\bigcirc\bigcirc) - t = (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{5/2} - t^{1/2})$, d'où $V_t(\bigcirc\bigcirc) = -t^4 + t^3 + t$.

Exemples de polynômes de Jones

- **Exemple** : On peut calculer le polynôme de Jones d'un entrelacs trivial à deux composantes avec la relation écheveau:

$$t^{-1}V_t(\infty) - tV_t(\infty) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\bigcirc\bigcirc)$$

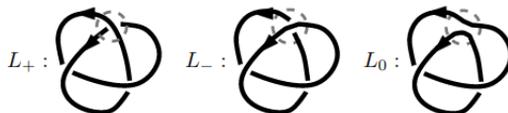
et donc $V_t(\bigcirc\bigcirc) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un entrelacs de Hopf:



donc $t^{-1}V_t(\bigcirc\bigcirc) - t(-t^{1/2} - t^{-1/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\bigcirc\bigcirc)$, d'où $V_t(\bigcirc\bigcirc) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un nœud de trèfle à droite:



donc $t^{-1}V_t(\bigcirc) - t = (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{5/2} - t^{1/2})$, d'où $V_t(\bigcirc) = -t^4 + t^3 + t$.

- Si on fait de même pour le trèfle gauche, on trouve $V_t(L) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$. Donc le nœud trèfle gauche n'est pas miroir !

Propriétés du polynôme de Jones

- ▶ **Théorème** : Soit L un entrelacs orienté et L^* son entrelacs miroir. Alors

$$V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1}).$$

- ▶ Tout entrelacs dont le polynôme de Jones n'est pas stable par permutation $t \leftrightarrow t^{-1}$ n'est pas miroir.

Propriétés du polynôme de Jones

- ▶ **Théorème** : Soit L un entrelacs orienté et L^* son entrelacs miroir. Alors

$$V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1}).$$

- ▶ Tout entrelacs dont le polynôme de Jones n'est pas stable par permutation $t \leftrightarrow t^{-1}$ n'est pas miroir.

- ▶ **Théorème** : Supposons que I est une fonction de nœuds $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ satisfaisant:

- ▶ C'est un invariant d'entrelacs orienté.
- ▶ La relation écheveau $t^{-1}I(L_+) - tI(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})I(L_0)$ et la normalisation $I(U) = 1$ pour le nœud trivial U .
- ▶ Alors $I_t(L) = V_t(L)$ pour tout entrelacs orienté L .

Propriétés du polynôme de Jones

- ▶ **Théorème** : Soit L un entrelacs orienté et L^* son entrelacs miroir. Alors

$$V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1}).$$

- ▶ Tout entrelacs dont le polynôme de Jones n'est pas stable par permutation $t \leftrightarrow t^{-1}$ n'est pas miroir.

- ▶ **Théorème** : Supposons que I est une fonction de nœuds $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ satisfaisant:

- ▶ C'est un invariant d'entrelacs orienté.

- ▶ La relation écheveau $t^{-1}I(L_+) - tI(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})I(L_0)$ et la normalisation $I(U) = 1$ pour le nœud trivial U .

- ▶ Alors $I_t(L) = V_t(L)$ pour tout entrelacs orienté L .

- ▶ **Question** : Est-ce que le polynôme de Jones est un invariant 'puissant' ?

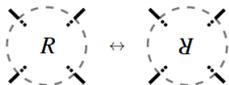
- ▶ Dans la table standard des 249 nœuds avec moins de 10 croisements:

- ▶ Si on regarde τ_3 le nombre de 3-coloriages pour chaque: on trouve 5 valeurs différentes: (3, 9, 27, 81, 243).

- ▶ Si on regarde V_t , on trouve 248 valeurs différentes avec seulement un couple de nœuds distincts qui ont le même polynôme.

- ▶ Dans cette table, on ne distingue pas les nœuds miroirs.

- ▶ Le polynôme de Jones ne permet également pas de distinguer des nœuds qui sont **mutés** l'un en l'autre:



- ▶ **Conjecture** : Le nœud trivial est le seul nœud K tel que $V_t(K) = 1$.

D'autres invariants polynomiaux

- **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$xP(L_+) + yP(L_-) + zP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY** (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, 1985).

D'autres invariants polynomiaux

- **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$xP(L_+) + yP(L_-) + zP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY** (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, 1985).

- **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY-PT** (Przytycki-Traczyk 1987). C'est une renormalisation du polynôme HOMFLY.

D'autres invariants polynomiaux

- **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$xP(L_+) + yP(L_-) + zP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY** (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, 1985).

- **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY-PT** (Przytycki-Traczyk 1987). C'est une renormalisation du polynôme HOMFLY.

- **L'homologie de Khovanov**, introduite par Khovanov en 1998, est une catégorification du polynôme de Jones.

- A un diagramme D d'entrelacs L , est associé un complexe $C(D)$ de $\mathbb{Z}[c]$ -modules, dont les groupes de cohomologie $H^i(D) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H^{i,j}(D)$ permettent de retrouver le polynôme de Jones par la dimension d'Euler graduée:

$$\sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{Q}}(H^{i,j}(D) \otimes \mathbb{Q}) = (q + q^{-1})V_L(q).$$

D'autres invariants polynomiaux

- ▶ **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$xP(L_+) + yP(L_-) + zP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY** (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter, 1985).

- ▶ **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(0_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY-PT** (Przytycki-Traczyk 1987). C'est une renormalisation du polynôme HOMFLY.

- ▶ **L'homologie de Khovanov**, introduite par Khovanov en 1998, est une catégorification du polynôme de Jones.
- ▶ A un diagramme D d'entrelacs L , est associé un complexe $C(D)$ de $\mathbb{Z}[c]$ -modules, dont les groupes de cohomologie $H^i(D) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H^{i,j}(D)$ permettent de retrouver le polynôme de Jones par la dimension d'Euler graduée:

$$\sum_{i,j} (-1)^i q^j \dim_{\mathbb{Q}}(H^{i,j}(D) \otimes \mathbb{Q}) = (q + q^{-1}) V_L(q).$$

- ▶ Kronheimer et Mrowka ont prouvé en 2011 que le nœud trivial est l'unique nœud dont l'invariant de Khovanov donne 1.

II. Lien entre nœuds et groupes de tresses

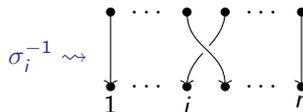
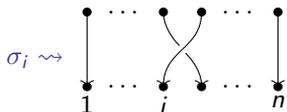
Présentation des groupes de tresses

► **Rappel** : (cf Exposé d'Oлга) Le **groupe de tresses** à n brins B_n est un groupe présenté par

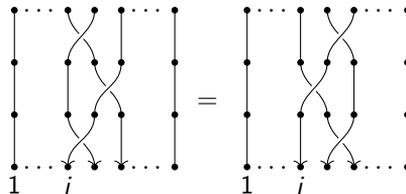
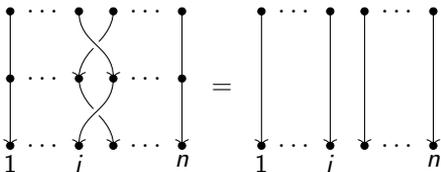
- générateurs σ_i , pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$,
- relations

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{pour } |i-j| > 1 \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2$$

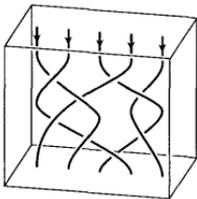
► Une **tresse à n brins** est la donnée de n brins dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ dont la frontière est $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times \{0, 1\}$ et tel que tout brin part d'un point en bas et arrive à un point en haut.



► Relations:



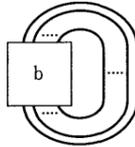
► **Exemple** :



$$\rightsquigarrow \sigma_1 \sigma_3 \sigma_4^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \in B_5$$

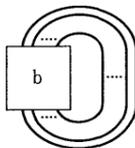
Clôture de tresses et théorème d'Alexander

- Soit $b \in B_n$. La **clôture** de b est l'entrelacs obtenu en recollant les extrémités de b comme ceci:



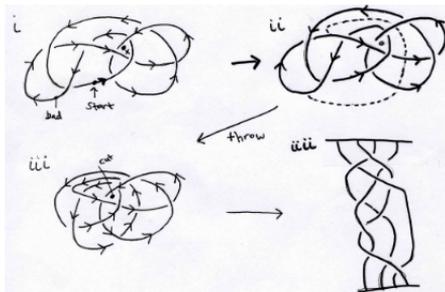
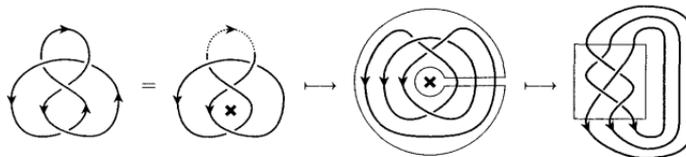
Clôture de tresses et théorème d'Alexander

- ▶ Soit $b \in B_n$. La **clôture** de b est l'entrelacs obtenu en recollant les extrémités de b comme ceci:



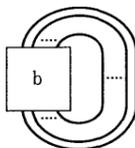
- ▶ **Théorème (Alexander)** : Tout entrelacs (orienté) est isotopiquement équivalent à la clôture d'une certaine tresse (orientée vers le bas).

- ▶ Esquisse de la preuve: on fixe un point de base x_0 dans L . Pour tout chemin orienté 'clockwise' relativement à x_0 , on le fait passer en dessous.



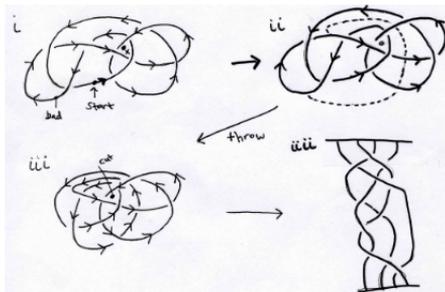
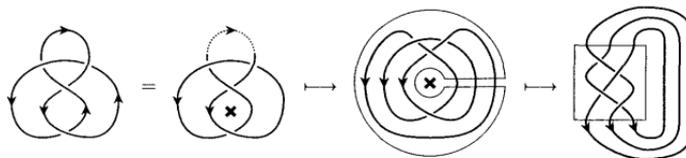
Clôture de tresses et théorème d'Alexander

- Soit $b \in B_n$. La **clôture** de b est l'entrelacs obtenu en recollant les extrémités de b comme ceci:



- **Théorème (Alexander)** : Tout entrelacs (orienté) est isotopiquement équivalent à la clôture d'une certaine tresse (orientée vers le bas).

- Esquisse de la preuve: on fixe un point de base x_0 dans L . Pour tout chemin orienté 'clockwise' relativement à x_0 , on le fait passer en dessous.



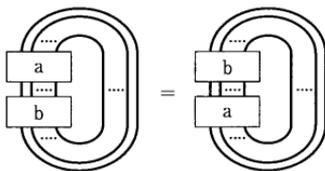
- Il existe une preuve de ce résultat basée sur l'algorithme de Seifert, cf Birman, *Braid, links and mapping*

Mouvements de Markov

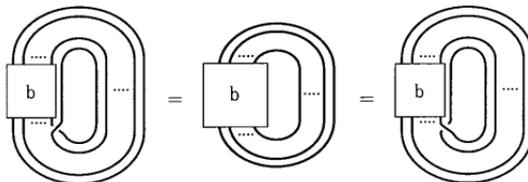
- ▶ Une telle construction ne produit pas une unique tresse. **Question** : Comment caractériser les tresses dont la clôture donne le même nœud, à équivalence près ?

Mouvements de Markov

- ▶ Une telle construction ne produit pas une unique tresse. **Question** : Comment caractériser les tresses dont la clôture donne le même nœud, à équivalence près ?
- ▶ **Théorème (Markov, 1935)** : Soient b, b' deux tresses. Alors $c(b) \simeq c(b')$ si et seulement si b et b' sont reliées par des suites de **mouvements de Markov**:
 - ▶ Mouvement M_1 : $ab \leftrightarrow ba$ pour $a, b \in B_n$.



- ▶ Mouvements M_2 : $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$ pour tout $b \in B_n$:

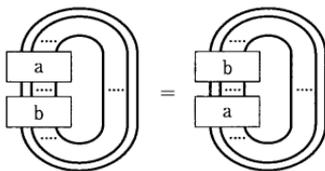


Mouvements de Markov

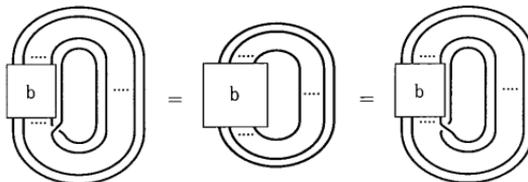
- ▶ Une telle construction ne produit pas une unique tresse. **Question** : Comment caractériser les tresses dont la clôture donne le même nœud, à équivalence près ?

- ▶ **Théorème (Markov, 1935)** : Soient b, b' deux tresses. Alors $c(b) \simeq c(b')$ si et seulement si b et b' sont reliées par des suites de **mouvements de Markov**:

- ▶ Mouvement M_1 : $ab \leftrightarrow ba$ pour $a, b \in B_n$.



- ▶ Mouvements M_2 : $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$ pour tout $b \in B_n$:



- ▶ **Conséquence** : On a alors vu que

$$\frac{\{\text{Noeuds et entrelacs}\}}{\sim} = \frac{\{\text{Diagrammes de noeuds et d'entrelacs}\}}{\{\text{Mvts de Reidemeister}\}} = \frac{\{\text{Tresses } \bigcup_{n \geq 1} B_n\}}{\{\text{Mvts de Markov}\}}$$

III. Représentations des groupes de tresses

- 1) Représentations via R -matrices
- 2) La représentation de Burau

R-matrices

- ▶ Soit V un espace vectoriel. On va associer à $b \in B_n$ une transformation linéaire en associant à chaque brin de b une copie de V .
- ▶ On définit des transformations linéaires sur les générateurs:

$$\downarrow : V \rightarrow V = \text{id}_V,$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := R,$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := S.$$

R-matrices

- Soit V un espace vectoriel. On va associer à $b \in B_n$ une transformation linéaire en associant à chaque brin de b une copie de V .

- On définit des transformations linéaires sur les générateurs:

$$\downarrow : V \rightarrow V = \text{id}_V,$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := R,$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := S.$$

- Relations entre R et S :

$$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$$

$$S = R^{-1}$$

$$(R \otimes 1) \circ (1 \otimes R) \circ (R \otimes 1) = (1 \otimes R) \circ (R \otimes 1) \circ (1 \otimes R)$$

R-matrices

- ▶ Soit V un espace vectoriel. On va associer à $b \in B_n$ une transformation linéaire en associant à chaque brin de b une copie de V .

- ▶ On définit des transformations linéaires sur les générateurs:

$$\downarrow : V \rightarrow V = \text{id}_V,$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := R,$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := S.$$

- ▶ Relations entre R et S :

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$S = R^{-1}$$

$$(R \otimes 1) \circ (1 \otimes R) \circ (R \otimes 1) = (1 \otimes R) \circ (R \otimes 1) \circ (1 \otimes R)$$

- ▶ Cette équation est appelée **équation de Yang-Baxter**. Si R satisfait l'équation de Yang-Baxter, on obtient $T : B_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$ qui est un invariant de tresses.

- ▶ R est appelée **R-matrice**.

R-matrices

- ▶ Soit V un espace vectoriel. On va associer à $b \in B_n$ une transformation linéaire en associant à chaque brin de b une copie de V .

- ▶ On définit des transformations linéaires sur les générateurs:

$$\downarrow : V \rightarrow V = \text{id}_V,$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := R,$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V := S.$$

- ▶ Relations entre R et S :

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array}$$

$$S = R^{-1} \quad (R \otimes 1) \circ (1 \otimes R) \circ (R \otimes 1) = (1 \otimes R) \circ (R \otimes 1) \circ (1 \otimes R)$$

- ▶ Cette équation est appelée **équation de Yang-Baxter**. Si R satisfait l'équation de Yang-Baxter, on obtient $T : B_n \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$ qui est un invariant de tresses.

- ▶ R est appelée **R-matrice**.

- ▶ **Exemple** : Si $\dim(V) = 1$. R est donnée par une matrice $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ et satisfait YB. Tout croisement positif (resp. négatif) donne la matrice $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} a^{-1} \end{pmatrix}$), et alors $T(\sigma) = a^{\sum \varepsilon(\sigma)}$.

R-matrices

- ▶ **Exemple** : Si $V = \text{Vect}(v_0, v_1)$ est de dimension 2. Alors $V \otimes V$ admet pour base $\{v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1\}$.
- ▶ R est une matrice 4×4 qui doit être inversible, et satisfaire l'équation de Yang-Baxter.
- ▶ Si $R(v_i \otimes v_j) = \sum a_{i,k}^{k,l} v_k \otimes v_l$, on considère une R -matrice qui a la propriété de **conservation de charge**, c'est à dire $a_{i,k}^{k,l} = 0$ sauf si $i + j = k + l$, i.e R stabilise les espaces engendrés par $\{v_0 \otimes v_0\}$, $\{v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0\}$, $\{v_1 \otimes v_1\}$.

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

R-matrices

- ▶ **Exemple** : Si $V = \text{Vect}(v_0, v_1)$ est de dimension 2. Alors $V \otimes V$ admet pour base $\{v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1\}$.
- ▶ R est une matrice 4×4 qui doit être inversible, et satisfaire l'équation de Yang-Baxter.
- ▶ Si $R(v_i \otimes v_j) = \sum a_{i,k}^{k,l} v_k \otimes v_l$, on considère une R -matrice qui a la propriété de **conservation de charge**, c'est à dire $a_{i,k}^{k,l} = 0$ sauf si $i + j = k + l$, i.e R stabilise les espaces engendrés par $\{v_0 \otimes v_0\}$, $\{v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0\}$, $\{v_1 \otimes v_1\}$.

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

- ▶ R satisfait l'équation de Yang-Baxter $\Rightarrow b = 0, e = a - \frac{cd}{a}, (a - f)(a + f - e) = 0$:

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & a - cd/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & a - cd/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cd/a \end{pmatrix}$$

R-matrices

- ▶ **Exemple** : Si $V = \text{Vect}(v_0, v_1)$ est de dimension 2. Alors $V \otimes V$ admet pour base $\{v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1\}$.
- ▶ R est une matrice 4×4 qui doit être inversible, et satisfaire l'équation de Yang-Baxter.
- ▶ Si $R(v_i \otimes v_j) = \sum a_{i,k}^{k,l} v_k \otimes v_l$, on considère une R -matrice qui a la propriété de **conservation de charge**, c'est à dire $a_{i,k}^{k,l} = 0$ sauf si $i + j = k + l$, i.e R stabilise les espaces engendrés par $\{v_0 \otimes v_0\}$, $\{v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0\}$, $\{v_1 \otimes v_1\}$.

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

- ▶ R satisfait l'équation de Yang-Baxter $\Rightarrow b = 0, e = a - \frac{cd}{a}, (a - f)(a + f - e) = 0$:

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & a - cd/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & a - cd/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cd/a \end{pmatrix}$$

- ▶ $a = t^{1/2}, d = t, c = t$:

$$R = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & t^{1/2} - t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \end{pmatrix}$$

Polynôme de Jones

- ▶ $a = t^{-1/2}, d = 1, c = 1$:

$$R = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & t^{-1/2} - t^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{1/2} \end{pmatrix}$$

Polynôme d'Alexander

Le polynôme de Jones par les R -matrices

- ▶ La matrice R_1 induit une représentation ψ_R de B_n . Peut-on en déduire un invariant de nœuds ?
- ▶ **Exemple** : Pour un entrelacs L , $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_R(b))$ où b est une tresse dont la clôture est L .

Le polynôme de Jones par les R -matrices

- ▶ La matrice R_1 induit une représentation ψ_R de B_n . Peut-on en déduire un invariant de nœuds ?
- ▶ **Exemple** : Pour un entrelacs L , $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_R(b))$ où b est une tresse dont la clôture est L .
- ▶ Il faut que ϕ_L soit stable par les M-moves: M1 ✓ puisque $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ mais M2 non en général.

Le polynôme de Jones par les R -matrices

- ▶ La matrice R_1 induit une représentation ψ_R de B_n . Peut-on en déduire un invariant de nœuds ?
- ▶ **Exemple** : Pour un entrelacs L , $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_R(b))$ où b est une tresse dont la clôture est L .
- ▶ Il faut que ϕ_L soit stable par les M-moves: M1 ✓ puisque $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ mais M2 non en général.
- ▶ On considère $\mu \in \text{End}(V)$, qui va décorer le haut de chaque brin de la tresse.
- ▶ **Condition** : Si μ satisfait:

- ▶ $R^{\pm 1} \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ R^{\pm 1}$,

- ▶ $\text{Tr}_2(R^{\pm 1} \circ (\mu \otimes \mu)) = \mu$, où Tr_2 est définie par

$$\text{Tr}_2 : \text{End}(V_1 \otimes V_2) \rightarrow \text{End}(V_2), \quad \text{Tr}_2(A)(e_i) = \sum_{j,k} A_{i,k}^{j,k} e_j \quad \text{où} \quad A(e_i \otimes e_j) = \sum_{k,l} A_{i,j}^{k,l} e_k \otimes e_l,$$

alors $\text{Tr}(\psi_R \circ \mu^{\otimes n})$ est invariant par M2.

- ▶ En effet, $\text{Tr}(\psi_R^{n+1}(\sigma_n^{\pm 1} b) \circ \mu^{\otimes(n+1)}) = \text{Tr}(\psi_R^{n+1}(b) \circ (\text{id}_V^{\otimes(n-1)} \otimes R^{\pm 1}) \circ \mu^{\otimes(n+1)}) = \text{Tr}(\psi_R^n(b) \circ \mu^{\otimes n})$.

Le polynôme de Jones par les R -matrices

- ▶ La matrice R_1 induit une représentation ψ_R de B_n . Peut-on en déduire un invariant de nœuds ?
- ▶ **Exemple** : Pour un entrelacs L , $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_R(b))$ où b est une tresse dont la clôture est L .
- ▶ Il faut que ϕ_L soit stable par les M-moves: M1 ✓ puisque $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ mais M2 non en général.
- ▶ On considère $\mu \in \text{End}(V)$, qui va décorer le haut de chaque brin de la tresse.

▶ **Condition** : Si μ satisfait:

$$\text{▶ } R^{\pm 1} \circ (\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu) \circ R^{\pm 1},$$

▶ $\text{Tr}_2(R^{\pm 1} \circ (\mu \otimes \mu)) = \mu$, où Tr_2 est définie par

$$\text{Tr}_2 : \text{End}(V_1 \otimes V_2) \rightarrow \text{End}(V_2), \quad \text{Tr}_2(A)(e_i) = \sum_{j,k} A_{i,k}^{j,k} e_j \quad \text{où } A(e_i \otimes e_j) = \sum_{k,l} A_{i,j}^{k,l} e_k \otimes e_l,$$

alors $\text{Tr}(\psi_R \circ \mu^{\otimes n})$ est invariant par M2.

▶ En effet, $\text{Tr}(\psi_R^{n+1}(\sigma_n^{\pm 1} b) \circ \mu^{\otimes(n+1)}) = \text{Tr}(\psi_R^{n+1}(b) \circ (\text{id}_V^{\otimes(n-1)} \otimes R^{\pm 1}) \circ \mu^{\otimes(n+1)}) = \text{Tr}(\psi_R^n(b) \circ \mu^{\otimes n})$.

▶ **Exemple** : Pour V de dimension 2, on peut vérifier que

$$\mu = \begin{pmatrix} t^{-1/2} & 0 \\ 0 & t^{1/2} \end{pmatrix} \in \text{End}(V)$$

vérifie ces deux propriétés, et donc $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_R(b) \circ \mu^{\otimes n})$ définit un invariant d'entrelacs.

▶ **Théorème** : $\phi_L(t)$ est un invariant d'entrelacs, qui est égal à $(t^{1/2} + t^{-1/2})$ fois le polynôme de Jones de L .

▶ **Preuve** : $t^{-1}R - tR^{-1} = (t^{-1/2} - t^{1/2})\text{id}_{V \otimes V}$, et R (resp. R^{-1} , $\text{id}_{V \otimes V}$) correspond à un croisement positif (resp. négatif, lissé).

Le polynôme d'Alexander par les R -matrices

- ▶ On considère la R -matrice R_2 :

$$\begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & d & t^{1/2} - t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{3/2} \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme μ défini par

$$h = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 \\ 0 & -t^{1/2} \end{pmatrix} \in \text{End}(V).$$

- ▶ μ vérifie les deux propriétés nécessaires pour l'invariance par M2, et donc $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_{R_2}(b) \circ \mu^{\otimes n})$ définit un invariant d'entrelacs orienté, pour b une tresse dont la clôture est L .
- ▶ Cependant, cette quantité donne toujours 0.

Le polynôme d'Alexander par les R -matrices

- ▶ On considère la R -matrice R_2 :

$$\begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & d & t^{1/2} - t^{3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{3/2} \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme μ défini par

$$h = \begin{pmatrix} t^{1/2} & 0 \\ 0 & -t^{1/2} \end{pmatrix} \in \text{End}(V).$$

- ▶ μ vérifie les deux propriétés nécessaires pour l'invariance par M2, et donc $\phi_L(t) = \text{Tr}(\psi_{R_2}(b) \circ \mu^{\otimes n})$ définit un invariant d'entrelacs orienté, pour b une tresse dont la clôture est L .
- ▶ Cependant, cette quantité donne toujours 0.
- ▶ **Théorème** : Soit L un entrelacs orienté, et b une tresse telle que $c(b) \sim L$. Alors, pour la représentation ψ_{R_2} induite par la R -matrice R_2 et l'application μ ci-dessus, on a

$$\text{Tr}_{2,3,\dots,n} \left(\psi_{R_2}(b) \circ (1 \otimes h^{\otimes(n-1)}) \right) = c \times \text{id}_V$$

et $c = \Delta_L(t)$ est le polynôme d'Alexander de L .

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow[1-1]{} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n - 1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n - 1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow{1-1} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n - 1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n - 1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.
- ▶ Burau a introduit en 1936 une représentation du groupe de tresses, qui a été plus tard interprétée comme une déformation de la représentation standard de \mathcal{S}_n . On définit $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par

$$\sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1 - t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_{n-i-1}$$

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow[1-1]{} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n - 1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto l_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n - 1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.
- ▶ Burau a introduit en 1936 une représentation du groupe de tresses, qui a été plus tard interprétée comme une déformation de la représentation standard de \mathcal{S}_n . On définit $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par

$$\sigma_i \mapsto l_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-1}$$

- ▶ On a $\rho = \rho_1 \oplus \bar{\rho}$ où $\bar{\rho}$ est une représentation irréductible $B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ de dimension $n - 1$, appelée **représentation de Burau réduite** définie par

$$\sigma_i \mapsto l_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-2}$$

Représentation de Burau

- ▶ On a une inclusion $B_n \rightarrow \mathcal{S}_n$, via $\sigma_i \mapsto (i, i + 1)$.

$$\{\text{Représentations irréductibles de } \mathcal{S}_n\} \xleftrightarrow[1-1]{} \{\text{Partitions } \lambda \text{ de } n\}$$

- ▶ Si $\lambda = (n - 1, 1)$, on obtient la représentation standard $\mathcal{S}_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ donnée par l'action de \mathcal{S}_n sur \mathbb{C}^n par permutation des variables.

$$s_i \mapsto l_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-1}.$$

- ▶ Elle est réductible car elle stabilise $\text{Vect}(\sum e_i)$, et son complémentaire est l'espace de dimension $n - 1$ des $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $z_1 + \dots + z_n = 0$.
- ▶ Burau a introduit en 1936 une représentation du groupe de tresses, qui a été plus tard interprétée comme une déformation de la représentation standard de \mathcal{S}_n . On définit $\rho : B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ par

$$\sigma_i \mapsto l_{i-1} \oplus \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-1}$$

- ▶ On a $\rho = \rho_1 \oplus \bar{\rho}$ où $\bar{\rho}$ est une représentation irréductible $B_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ de dimension $n - 1$, appelée **représentation de Burau réduite** définie par

$$\sigma_i \mapsto l_{i-2} \oplus \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \oplus l_{n-i-2}$$

- ▶ **Théorème (cf Birman, Ohstuki)** : Soit b une tresse. Alors on a

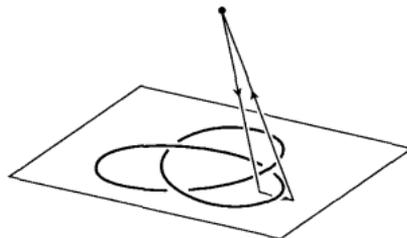
$$\Delta_{c(b)}(t) \sim \frac{\det(\bar{\rho}(b) - l_{n-1})}{1 + t + \dots + t^{n-1}}.$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ **Rappel** : Le polynôme d'Alexander repose sur une matrice de Seifert M définie à partir de $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert telle que $\partial(F) = L$.
- ▶ Soit M la 3-variété obtenue en coupant $S^3 - L$ le long de F . On a comme sections F^+ et F^- dans la frontière de M .
 - ▶ Soient $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des copies de L , et F_i^\pm les copies de F_\pm dans M_i . $\widetilde{S^3 - K}$ est le revêtement cyclique infini de $S^3 - L$, et est obtenu par la réunion des M_i en recollant F_i^+ et F_{i+1}^- .
 - ▶ On montre que $H_1(\widetilde{S^3 - L}) = \mathbb{R}[t^{\pm 1}]^{2g} / (t^t M - M) \mathbb{R}[t^{\pm 1}]^{2g}$ où g est le genre de F .
 - ▶ t agit sur $\widetilde{S^3 - K}$ en envoyant M_i sur M_{i+1} .
- ▶ Le polynôme d'Alexander est donc lié au groupe $H_1(\widetilde{S^3 - L})$.

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ **Rappel** : Le polynôme d'Alexander repose sur une matrice de Seifert M définie à partir de $H_1(F)$, où F est une surface de Seifert telle que $\partial(F) = L$.
- ▶ Soit M la 3-variété obtenue en coupant $S^3 - L$ le long de F . On a comme sections F^+ et F^- dans la frontière de M .
 - ▶ Soient $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ des copies de M , et F_i^\pm les copies de F_\pm dans M_i . $\widetilde{S^3 - K}$ est le revêtement cyclique infini de $S^3 - L$, et est obtenu par la réunion des M_i en recollant F_i^+ et F_{i+1}^- .
 - ▶ On montre que $H_1(\widetilde{S^3 - L}) = \mathbb{R}[t^{\pm 1}]^{2g} / (t^t M - M) \mathbb{R}[t^{\pm 1}]^{2g}$ où g est le genre de F .
 - ▶ t agit sur $\widetilde{S^3 - K}$ en envoyant M_i sur M_{i+1} .
- ▶ Le polynôme d'Alexander est donc lié au groupe $H_1(\widetilde{S^3 - L})$.
- ▶ Si b est une tresse, on va calculer $H_1(\widetilde{S^3 - c(b)})$. On fixe un point de base p dans \mathbb{R}^3 .



- ▶ **Notation** :

- ▶ Autour d'un croisement de $c(b)$, on a 4 cycles x, y, x', y' de $H_1(S^3 - L)$: par $y' = x, x' + y' = x + y$ dans $H_1(S^3 - L)$.



qui sont reliés

Intuition topologique pour la représentation de Burau

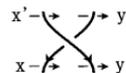
- Soit p_i la copie de p dans M_i , on relève un cycle x en un cycle $x_i \in M_i \cup M_{i+1}$, qui est un chemin de p_i à p_{i+1} , idem pour les autres cycles:

$$y'_i = x_i, \quad x'_1 + y'_{i+1} = x_i + y_{i+1}$$

- L'action de t est donnée par $t \cdot x_i = x_{i+1}$, et donc

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

- Idem pour les 4 cycles x, y, x', y' autour d'un croisement négatif:



$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

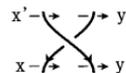
- Soit p_i la copie de p dans M_i , on relève un cycle x en un cycle $x_i \in M_i \cup M_{i+1}$, qui est un chemin de p_i à p_{i+1} , idem pour les autres cycles:

$$y'_i = x_i, \quad x'_1 + y'_{i+1} = x_i + y_{i+1}$$

- L'action de t est donnée par $t \cdot x_i = x_{i+1}$, et donc

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

- Idem pour les 4 cycles x, y, x', y' autour d'un croisement négatif:



$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

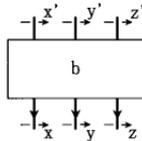
- **Exemple** : Si on considère des tresses à trois brins, on a 6-cycles autour des générateurs 'positifs' σ_1 et σ_2 :

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & t \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

donc ${}^t(x'_i \ y'_i \ z'_i) = \phi_3(b)^t(x_i \ y_i \ z_i)$.

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si on clôt la tresse b , on doit rajouter des relations entre les cycles $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i$ et $z_i = z'_i$.

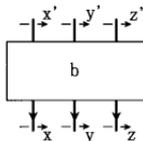


- ▶ D'où

$$(I - \phi_3(b)) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si on clôt la tresse b , on doit rajouter des relations entre les cycles $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i$ et $z_i = z'_i$.



- ▶ D'où

$$(I - \phi_3(b)) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

- ▶ Soit $\Delta = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Par des arguments de topologie algébrique, on peut montrer qu'on a une suite exacte

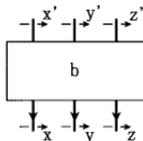
$$0 \rightarrow \Delta/(1-t^3) \rightarrow (\Delta/(1-t)) \oplus \left(\widehat{\Delta^3}/(I - \widehat{\phi}_3(b))\widehat{\Delta^3} \right) \rightarrow H_1(\widetilde{S^3 - L}) \rightarrow 0$$

où $\widehat{\Delta^3}$ est un sous-espace de Δ^3 de codimension 1 (correspondant à l'espace vectoriel associé à la représentation de Burau réduite).

- ▶ $\widetilde{S^3 - L}$ est obtenu comme le recollement de $S^3 - (\widetilde{D^2} \times S_1)$ et $D^2 \times \widetilde{S^1} - L$ le long de $\partial \widetilde{D^2} \times S^1$.
- ▶ On montre que $D^2 \times \widetilde{S^1} - L \simeq (\Delta/(1-t)) \oplus \left(\widehat{\Delta^3}/(I - \widehat{\phi}_3(b))\widehat{\Delta^3} \right)$.

Intuition topologique pour la représentation de Burau

- ▶ Si on clôt la tresse b , on doit rajouter des relations entre les cycles $x_i = x'_i$, $y_i = y'_i$ et $z_i = z'_i$.



- ▶ D'où

$$(I - \phi_3(b)) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0$$

- ▶ Soit $\Delta = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Par des arguments de topologie algébrique, on peut montrer qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta/(1-t^3) \rightarrow (\Delta/(1-t)) \oplus \left(\widehat{\Delta^3}/(I - \widehat{\phi}_3(b))\widehat{\Delta^3} \right) \rightarrow H_1(\widetilde{S^3 - L}) \rightarrow 0$$

où $\widehat{\Delta^3}$ est un sous-espace de Δ^3 de codimension 1 (correspondant à l'espace vectoriel associé à la représentation de Burau réduite).

- ▶ $\widetilde{S^3 - L}$ est obtenu comme le recollement de $S^3 - (\widetilde{D^2} \times S_1)$ et $D^2 \times \widetilde{S^1} - L$ le long de $\partial \widetilde{D^2} \times \widetilde{S^1}$.
- ▶ On montre que $D^2 \times \widetilde{S^1} - L \simeq (\Delta/(1-t)) \oplus \left(\widehat{\Delta^3}/(I - \widehat{\phi}_3(b))\widehat{\Delta^3} \right)$.
- ▶ Le polynôme d'Alexander $\Delta_L(t)$ est le déterminant d'une matrice de Seifert associée à $H_1(F)$, et on a

$$H_1(\widetilde{S^3 - L}) \sim \mathbb{R}[t^{\pm 1}]^{2g} / (t^t M - M) \mathbb{R}[t^{\pm 1}]^{2g}$$

d'où $\Delta_L(t) = c \frac{1-t}{1-t^3} \det(I - \widehat{\phi}_3(b))$ où c est une unité de Δ .

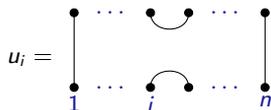
IV. Invariants via des représentations d'algèbres

- 1) Le crochet de Kauffmann par les algèbres Temperley-Lieb
- 2) Le polynôme HOMFLY par les algèbres de Hecke

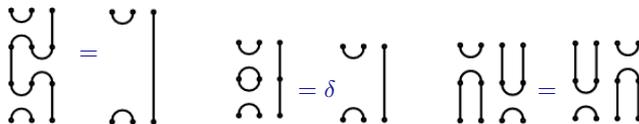
L'algèbre de Temperley-Lieb

- ▶ L'algèbre de Temperley-Lieb de degré n , notée TL_n est une $Z[A, A^{-1}]$ algèbre dont les éléments sont des diagrammes dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ construits similairement aux diagrammes de tresses, dans lesquels on ajoute des 'bulles'.
- ▶ On va avoir des relations permettant de lisser les croisements, ainsi que de supprimer les bulles quitte à multiplier par $-A^2 - A^{-2} := \delta$.
- ▶ Plus, précisément, TL_n peut être présentée par

- ▶ générateurs u_1, u_2, \dots, u_{n-1}



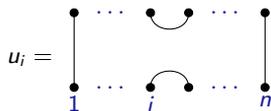
- ▶ relations $u_i u_{i+1} u_i = u_i$, $u_i^2 = \delta u_i$, $u_i u_j = u_j u_i$ si $|i - j| > 1$.



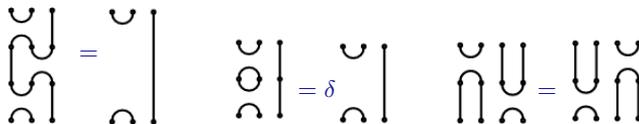
L'algèbre de Temperley-Lieb

- ▶ L'algèbre de Temperley-Lieb de degré n , notée TL_n est une $Z[A, A^{-1}]$ algèbre dont les éléments sont des diagrammes dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ construits similairement aux diagrammes de tresses, dans lesquels on ajoute des 'bulles'.
- ▶ On va avoir des relations permettant de lisser les croisements, ainsi que de supprimer les bulles quitte à multiplier par $-A^2 - A^{-2} := \delta$.
- ▶ Plus, précisément, TL_n peut être présentée par

- ▶ générateurs u_1, u_2, \dots, u_{n-1}



- ▶ relations $u_i u_{i+1} u_i = u_i$, $u_i^2 = \delta u_i$, $u_i u_j = u_j u_i$ si $|i - j| > 1$.



- ▶ On définit un homomorphisme $\rho_n : B_n \rightarrow TL_n$ par

$$\rho_n(\sigma_i) = A1_n + A^{-1}U_i, \quad \rho_n(\sigma_i^{-1}) = A^{-1}1_n + AU_i$$

- ▶ On vérifie que $\rho_n(\sigma_i)\rho_n(\sigma_i^{-1}) = 1$, $\rho_n(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \rho_n(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$ et $\rho_n(\sigma_i\sigma_j) = \rho_n(\sigma_j\sigma_i)$, $|i - j| > 1$.
- ▶ L'idée de ρ_n est exactement celle du crochet de Kauffman: on va résoudre les croisements de deux façons différentes, avec des coefficients A ou A^{-1} .

Lien avec le crochet de Kauffman

- ▶ Etant donnée une tresse $b = \sigma_{i_1}^{a_1} \sigma_{i_2}^{a_2} \dots \sigma_{i_s}^{a_s} \in B_n$, on a

$$\rho_n(b) = (A + A^{-1}U_{i_1})_1^{a_1} \dots (A + A^{-1}U_{i_s})^{a_s} = \sum_t \langle b \mid t \rangle U_t$$

- ▶ Les U_t représentent les états où les croisements sont résolus: on pose $\langle U_t \rangle = \langle c(U_t) \rangle = \delta^{\|U\|}$ où $\|U\|$ est le nombre de composantes de l'entrelacs lissé moins 1.
- ▶ Pour une tresse b , on a $\langle c(b) \rangle = \sum_t \langle b \mid t \rangle \delta^{\|U\|}$ n'est pas invariant par les mouvements de Markov.
- ▶ Cependant, pour $b = \sigma_{i_1}^{a_1} \sigma_{i_2}^{a_2} \dots \sigma_{i_s}^{a_s}$, le crochet normalisé

$$\langle c(b) \rangle = (-A^3)^{-w(b)} \sum_t \langle b \mid t \rangle \delta^{\|U\|},$$

où $w(b) = a_1 + a_2 + \dots + a_s$, est un invariant d'entrelacs. Il correspond au crochet de Kauffman.

Lien avec le crochet de Kauffman

- ▶ Etant donnée une tresse $b = \sigma_{i_1}^{a_1} \sigma_{i_2}^{a_2} \dots \sigma_{i_s}^{a_s} \in B_n$, on a

$$\rho_n(b) = (A + A^{-1}U_{i_1})^{a_1} \dots (A + A^{-1}U_{i_s})^{a_s} = \sum_t \langle b | t \rangle U_t$$

- ▶ Les U_t représentent les états où les croisements sont résolus: on pose $\langle U_t \rangle = \langle c(U_t) \rangle = \delta^{\|U\|}$ où $\|U\|$ est le nombre de composantes de l'entrelacs lissé moins 1.

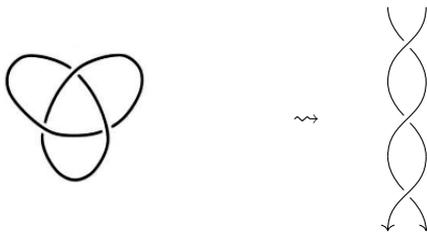
- ▶ Pour une tresse b , on a $\langle c(b) \rangle = \sum_t \langle b | t \rangle \delta^{\|U\|}$ n'est pas invariant par les mouvements de Markov.

- ▶ Cependant, pour $b = \sigma_{i_1}^{a_1} \sigma_{i_2}^{a_2} \dots \sigma_{i_s}^{a_s}$, le crochet normalisé

$$\langle c(b) \rangle = (-A^3)^{-w(b)} \sum_t \langle b | t \rangle \delta^{\|U\|},$$

où $w(b) = a_1 + a_2 + \dots + a_s$, est un invariant d'entrelacs. Il correspond au crochet de Kauffman.

- ▶ **Exemple** : Le nœud trèfle gauche est la clôture de la tresse σ_1^3 :



- ▶ $\rho(\sigma_1^3) = (A + A^{-1}U_1)^3 = A^3 + 3AU_1 + 3A^{-1}U_1^2 + A^{-3}U_1^3$, et donc

$$\begin{aligned} \langle 4_1 \rangle &= \langle c(\sigma_1^3) \rangle = (-A^3)^{-3} [A^3 \langle 1_2 \rangle + 3A \langle U_1 \rangle + 3A^{-1} \langle U_1^2 \rangle + A^{-3} \langle U_1^3 \rangle] \\ &= (-A^3)^{-3} (A^3 \delta + 3A + 3A^{-1} \delta + A^{-3} \delta^2) \\ &= A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}. \end{aligned}$$

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.

Algèbres de Hecke

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.
- ▶ Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1 - t)x + t$.
- ▶ L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ est une déformation de l'algèbre $\mathbb{C}[S_n]$ présentée par
 - ▶ générateurs x_i pour $1 \leq i \leq n - 1$,
 - ▶ relations

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \quad x_i^2 = (t - 1)x_i + t, \quad x_i x_k = x_k x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n - 1 \text{ et } |i - k| > 1.$$

► L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.

► Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1-t)x + t$.

► L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ est une déformation de l'algèbre $\mathbb{C}[S_n]$ présentée par

► générateurs x_i pour $1 \leq i \leq n-1$,

► relations

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \quad x_i^2 = (t-1)x_i + t, \quad x_i x_k = x_k x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } |i-k| > 1.$$

► Jones a étudié en 1987 dans *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials* les représentations $\rho : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ qui ont deux valeurs propres distinctes.

► Il construit un invariant polynomial à deux variables via les représentations de $H_n(t)$: c'est le polynôme HOMFLY. La deuxième variable provient d'une famille de traces à 1 paramètre sur l'algèbre $H_n(t)$.

► Considérons $f : B_n \rightarrow H_n(t)$, $\sigma_i \mapsto x_i$. f commute avec les inclusions $B_{n-1} \hookrightarrow B_n$ et $H_{n-1}(t) \hookrightarrow H_n(t)$ mais n'est pas un homomorphisme.

Algèbres de Hecke

- ▶ L'introduction de la représentation de Burau a mené à la définition du polynôme HOMFLY en 1985. On retrouve les polynômes d'Alexander et de Jones comme spécialisations de HOMFLY.
- ▶ Si ρ est la représentation de Burau, alors $\rho(\sigma_i)$ satisfait une équation quadratique de la forme $x^2 = (1-t)x + t$.
- ▶ L'algèbre de Hecke $H_n(t)$ est une déformation de l'algèbre $\mathbb{C}[S_n]$ présentée par

- ▶ générateurs x_i pour $1 \leq i \leq n-1$,

- ▶ relations

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1}, \quad x_i^2 = (t-1)x_i + t, \quad x_i x_k = x_k x_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } |i-k| > 1.$$

- ▶ Jones a étudié en 1987 dans *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials* les représentations $\rho : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ qui ont deux valeurs propres distinctes.
- ▶ Il construit un invariant polynomial à deux variables via les représentations de $H_n(t)$: c'est le polynôme HOMFLY. La deuxième variable provient d'une famille de traces à 1 paramètre sur l'algèbres $H_n(t)$.
- ▶ Considérons $f : B_n \rightarrow H_n(t)$, $\sigma_i \mapsto x_i$. f commute avec les inclusions $B_{n-1} \hookrightarrow B_n$ et $H_{n-1}(t) \hookrightarrow H_n(t)$ mais n'est pas un homomorphisme.
- ▶ **Théorème (H-O-M-F-L-Y '1985)** : Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe une unique fonction $\text{tr} : \mathbf{H} \rightarrow \mathbb{C}$, où $\mathbf{H} = \bigcup_{n \geq 0} H_n(t)$ vérifiant:

- ▶ $\text{tr}(1) = 1$,

- ▶ $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$,

- ▶ tr est \mathbb{C} -linéaire,

- ▶ $\text{tr}(u x_{n-1} v) = z \text{tr}(uv)$ pour $u, v \in H_{n-1}$.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ **Remarque** : H peut-être interprétée comme une 2-catégorie linéaire, et dans ce cas l'application trace correspond bien à l'idée de fermer le diagramme sur le droit en collant les extrémités des brins.

- ▶ **Remarque** : H peut-être interprétée comme une 2-catégorie linéaire, et dans ce cas l'application trace correspond bien à l'idée de fermer le diagramme sur le droit en collant les extrémités des brins.
- ▶ Pour tout tresse b , on peut calculer $tr(f(b))$ par les axiômes ci-dessus. **Exemple** : Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$\begin{aligned}tr(f(b)) &= tr(x_1^3) = tr(((t-1)x_1 + t)x_1) = (t-1)tr(x_1^2) + ttr(x_1) \\ &= (t-1)tr((t-1)x_1 + t) + zt \\ &= (t-1)^2z + t(t-1) + zt = z(t^2 - t + 1) + t(t-1)\end{aligned}$$

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ **Remarque** : H peut-être interprétée comme une 2-catégorie linéaire, et dans ce cas l'application trace correspond bien à l'idée de fermer le diagramme sur le droit en collant les extrémités des brins.
- ▶ Pour tout tresse b , on peut calculer $tr(f(b))$ par les axiômes ci-dessus. **Exemple** : Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$\begin{aligned}tr(f(b)) &= tr(x_1^3) = tr(((t-1)x_1 + t)x_1) = (t-1)tr(x_1^2) + ttr(x_1) \\ &= (t-1)tr((t-1)x_1 + t) + zt \\ &= (t-1)^2z + t(t-1) + zt = z(t^2 - t + 1) + t(t-1)\end{aligned}$$

- ▶ Cependant, cette fonction ne permet pas de définir un invariant de nœuds puisqu'elle n'est pas stable par les mouvements M2: $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$.
- ▶ On va tordre cette trace: supposons qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $tr(kx_i) = tr((kx_i)^{-1})$, alors

$$k^2 = \frac{1+z-t}{tz} \Rightarrow z = -\frac{1-t}{1-k^2t}.$$

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ **Remarque** : H peut-être interprétée comme une 2-catégorie linéaire, et dans ce cas l'application trace correspond bien à l'idée de fermer le diagramme sur le droit en collant les extrémités des brins.
- ▶ Pour tout tresse b , on peut calculer $tr(f(b))$ par les axiômes ci-dessus. **Exemple** : Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$\begin{aligned}tr(f(b)) &= tr(x_1^3) = tr(((t-1)x_1 + t)x_1) = (t-1)tr(x_1^2) + ttr(x_1) \\ &= (t-1)tr((t-1)x_1 + t) + zt \\ &= (t-1)^2z + t(t-1) + zt = z(t^2 - t + 1) + t(t-1)\end{aligned}$$

- ▶ Cependant, cette fonction ne permet pas de définir un invariant de nœuds puisqu'elle n'est pas stable par les mouvements M2: $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$.
- ▶ On va tordre cette trace: supposons qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $tr(kx_i) = tr((kx_i)^{-1})$, alors

$$k^2 = \frac{1+z-t}{tz} \Rightarrow z = -\frac{1-t}{1-k^2t}.$$

- ▶ On pose $\kappa = k^2$ et $f_\kappa : B_n \rightarrow H_n(t)$ par $f_\kappa(\sigma_i) = \sqrt{\kappa}\sigma_i$. Du coup,

$$tr(f_\kappa(\sigma_n)) = -\sqrt{\kappa} \frac{1-t}{1-\kappa t}$$

- ▶ On veut définir $F : B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est invariante par M2, or:

$$tr(f(b \cdot \sqrt{\kappa}\sigma_n)) = -\sqrt{\kappa} \frac{1-t}{1-\kappa t} tr(f(b)) = tr(f(b \cdot \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sigma_n^{-1}))$$

donc on définit

$$F(b) = F_b(t, \kappa) = \left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1-\kappa t}{1-t}\right)^{n-1} tr(f_\kappa(b)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{1-\kappa t}{1-t}\right)^{n-1} (\sqrt{\kappa})^{w(b)} tr(f(b)).$$

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.
- ▶ Si on pose $l = \sqrt{\kappa}t^{1/2}$ et $m = t^{1/2} - t^{-1/2}$, on obtient un polynôme de Laurent P dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$. On vérifie que ce polynôme de Laurent vérifie la relation écheveau

$$mP_{L_0}(l, m) = l^{-1}P_{L_+}(l, m) - lP_{L_-}(l, m)$$

et donc on retrouve le polynôme HOMFLY-PT.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.
- ▶ Si on pose $l = \sqrt{\kappa}t^{1/2}$ et $m = t^{1/2} - t^{-1/2}$, on obtient un polynôme de Laurent P dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$. On vérifie que ce polynôme de Laurent vérifie la relation écheveau

$$mP_{L_0}(l, m) = l^{-1}P_{L_+}(l, m) - lP_{L_-}(l, m)$$

et donc on retrouve le polynôme HOMFLY-PT.

- ▶ **Exemple :** Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$F_b(t, \kappa) = \kappa(1 + t^2 - \kappa t^2) = \kappa t \left(2 - \kappa t + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 \right)$$

et donc $P_b(l, m) = 2l^2 - l^4 + l^2m^2$.

Traces sur les algèbres de Hecke et polynôme HOMFLY

- ▶ F ainsi construite est un homéomorphisme $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ qui est stable par les mouvements de Markov, donc il s'étend en un invariant d'entrelacs en posant $F_L(t, \kappa) = F_b(t, \kappa)$ pour b une tresse telle que $L \sim c(b)$.
- ▶ Si on pose $l = \sqrt{\kappa}t^{1/2}$ et $m = t^{1/2} - t^{-1/2}$, on obtient un polynôme de Laurent P dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$. On vérifie que ce polynôme de Laurent vérifie la relation écheveau

$$mP_{L_0}(l, m) = l^{-1}P_{L_+}(l, m) - lP_{L_-}(l, m)$$

et donc on retrouve le polynôme HOMFLY-PT.

- ▶ **Exemple :** Pour $b = \sigma_1^3$, on a

$$F_b(t, \kappa) = \kappa(1 + t^2 - \kappa t^2) = \kappa t \left(2 - \kappa t + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 \right)$$

et donc $P_b(l, m) = 2l^2 - l^4 + l^2m^2$.

- ▶ Lien avec les polynômes d'Alexander et de Jones:

$$\Delta_L(t) = P_L(1, t^{1/2} - t^{-1/2}) \qquad V_L(t) = P_L(t, t^{1/2} - t^{-1/2}).$$

Merci pour votre attention.