

Introduction à la théorie des nœuds et leurs invariants.

Benjamin Dupont

Groupe de travail sur les groupes de tresses

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

1er Avril 2021

Plan

I. Nœuds et entrelacs

II. Invariants de coloriage

III. Le polynôme d'Alexander

IV. Le polynôme de Jones

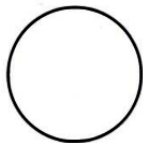
Références

- ▶ *Knots and Links*, Peter Cromwell, 2004.
- ▶ *Quantum invariants: a study of knots, 3-manifolds and their sets*, Tomotada Ohtsuki, 2001.
- ▶ *Knot notes*, <https://math.ucsd.edu/~justin/Papers/knotes.pdf>,
- ▶ Un mémoire de stage de Master de l'Université de Laval,
<https://corpus.ulaval.ca/jspui/bitstream/20.500.11794/21368/1/27104.pdf>.

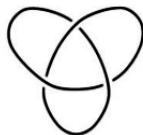
I. Nœuds et entrelacs

nœuds et équivalences

- **Definition 1** : Un **nœud** est un sous ensemble $K \subset \mathbb{R}^3$ homéomorphe à S^1 .



Noeud trivial 0_1



nœud trèfle gauche 3_1



nœud en huit 4_1

- **Exemple** :

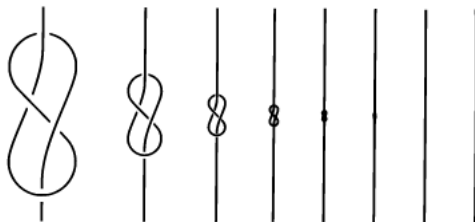
- **Definition 2**: Un **nœud** est un sous ensemble de \mathbb{R}^3 composé de points localement plats homéomorphe à S^1 .

- $x \in K$ est localement plat s'il existe un voisinage U de x tel que $(U, U \cap K)$ est homéomorphe à la boule unité $(B_0(1),]-1, 1[)$.

- On voudrait s'autoriser à 'déformer' des nœuds en gardant des nœuds équivalents. Quelle est la bonne notion d'équivalence à utiliser ?

- Soit $X \subset \mathbb{R}^3$, une **homotopie** de X est une fonction $h : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que h_0 est la fonction identité (où $h_t : X \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^3$.)

- Ce n'est pas la bonne notion: tout nœud est homotopique au nœud trivial.

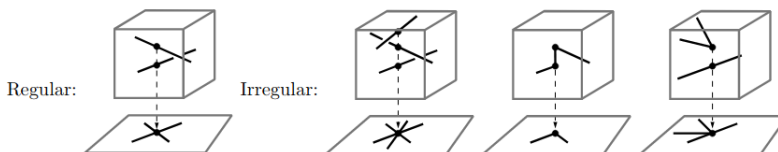


Nœuds et équivalences

- ▶ Une homotopie h est une **isotopie** si pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $h_t : X \times \{t\}$ est injective.
- ▶ De même, tout nœud est isotopique au nœud trivial. Pour résoudre ceci, on doit s'assurer que l'espace contenant le nœud bouge continuellement avec le nœud.
- ▶ Deux nœuds K_1 et K_2 sont **(isotopiquement) équivalents** s'il existe une isotopie $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $h(K_1, 0) = h_0(K_1) = K_1$ et $h(K_1, 1) = h_1(K_1) = K_2$.
- ▶ Ceci définit une relation d'équivalence \sim sur les nœuds.
- ▶ Un **invariant** est une fonction $I : \{\text{nœuds}\} \rightarrow X$ (où X est un ensemble 'connu' tel que \mathbb{N}, \mathbb{Z} ou un anneau de polynômes) et tel que $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$.
 - ▶ Si $K_1 \sim K_2$, alors $I(K_1) = I(K_2)$ pour tout invariant.
 - ▶ S'il existe I invariant tel que $I(K_1) \neq I(K_2)$, alors K_1 et K_2 ne sont pas équivalents.
 - ▶ Si il existe un invariant I tel que $I(K_1) = I(K_2)$, on ne peut pas conclure que $K_1 \sim K_2$.

Diagrammes de nœuds

- ▶ Si K est un nœud dans \mathbb{R}^3 , on définit son **diagramme** par $\pi(K) \subseteq \mathbb{R}^2$, où π est la projection parallèlement à l'axe (Oz) sur le plan engendré par (Ox) et (Oy) .
- ▶ La projection de K est régulière si pour tout $x \in \pi(K)$, $\pi^{-1}(x)$ contient au plus deux points de K .
- ▶ Un nœud a une projection irrégulière si:
 - ▶ Il existe $x \in \pi(K)$ ayant 3 points ou plus dans sa préimage.
 - ▶ Il a un arc parallèle à (Oz) .
 - ▶ Il a un point de tangence.



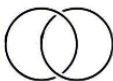
- ▶ Si K a une projection régulière, on peut définir son diagramme de nœud correspondant en redessinant $\pi(K)$ avec un trait discontinu près de chaque croisement indiquant quel brin passe au dessus de l'autre.
- ▶ Un nœud K possède une projection régulière.
 - ▶ Si $\pi(K)$ n'est pas régulière, on peut considérer une ε -déformation de K qui est régulière, et est isotopiquement équivalente à K .

Entrelacs, orientation, miroir

- ▶ Un **entrelacs** est une union disjointe finie de nœuds K_i , notée

$$L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n.$$

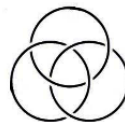
Chaque K_i est une **composante** de L . Le nombre de composantes $\mu(L)$ est appelé **multiplicité**.



Entrelacs de Hopf

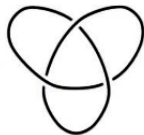


Entrelacs de Whitehead

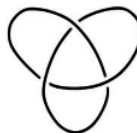


Anneaux borroméens.

- ▶ On définit de même des **invariants** et **diagrammes** d'entrelacs. On étend la définition d'**équivalence**.
- ▶ Un entrelacs K peut être orienté en fixant une orientation pour chacune de ses composantes. On définit alors son **opposé** $-K$ en inversant l'orientation.
- ▶ Soit K un entrelacs. On définit le miroir de K , noté K^* , par $r(K)$, où $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est l'homéomorphisme $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y - z)$.
- ▶ **Exemple** : Trèfle gauche $3_1 \rightsquigarrow$ Trèfle droit 3_1^* .

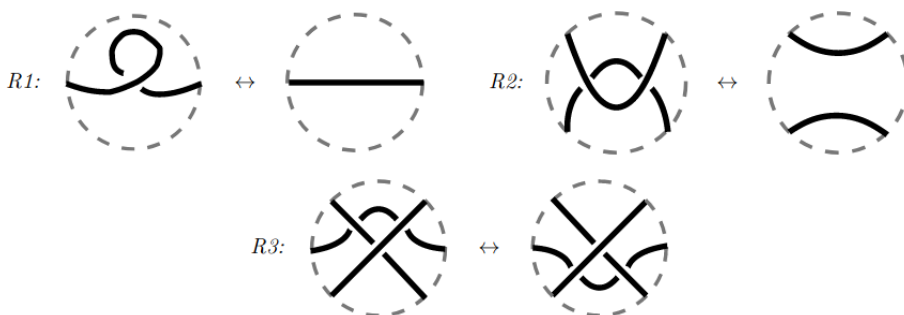


\rightsquigarrow

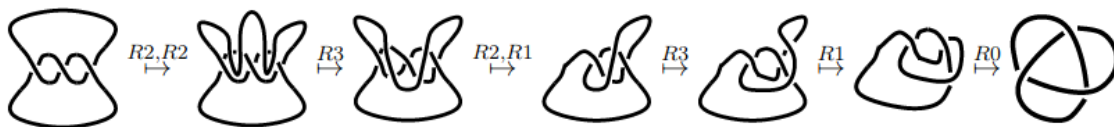


Mouvements de Reidemeister

- ▶ Il existe, en plus des isotopies de l'espace, trois mouvements permettant de transformer un nœud en un nœud équivalent: ce sont les **mouvements de Reidemeister** :



- ▶ **Théorème de Reidemeister** : Deux entrelacs K et K' sont équivalents si et seulement si leurs diagrammes $\pi(K)$ et $\pi(K')$ peuvent être transformés l'un en l'autre par des isotopies de l'espace et des suites en zig-zag de mouvements de Reidemeister.
- ▶ **Exemple** : Le nœud trèfle gauche est équivalent au nœud en huit:



Mouvements de Reidemeister

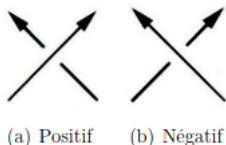
- ▶ Ces mouvements sont suffisants: on peut retrouver les images miroir à partir de ceux-ci. Par exemple:



- ▶ Il existe un équivalent de ce théorème pour des entrelacs orientés: deux entrelacs orientés K et K' sont équivalents si et seulement si $\pi(K)$ et $\pi(K')$ sont reliés par des isotopies de l'espace et des suites en zig-zag de mouvements de Reidemeister.
 - ▶ Il faut 2 mouvements R_1 (pour chaque orientation).
 - ▶ Il faut 4 mouvements R_2 .
 - ▶ Il faut 8 mouvements R_3 .

Premiers invariants

- ▶ Soit D un diagramme d'un entrelacs. On définit $c(K)$ comme le nombre de croisements minimal requis pour définir K .
 - ▶ C'est un invariant d'entrelacs.
 - ▶ **Problème** : Comment le calculer ?
- ▶ Soit D un diagramme d'un entrelacs orienté. Alors chaque croisement de D admet (à rotation près) une des deux formes suivantes:



- ▶ Soit c un croisement de D . On définit une fonction ε par

$$\varepsilon(c) = \begin{cases} +1 & \text{si } c \text{ est un croisement positif} \\ -1 & \text{si } c \text{ est un croisement négatif} \end{cases}$$

- ▶ La **valeur d'entrelacement** de K est donnée par la quantité

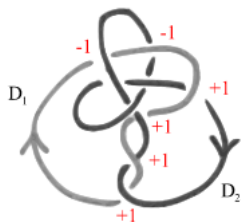
$$\text{lk}(K) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \tilde{C}_K} \varepsilon(c)$$

où \tilde{C}_K est l'ensemble des croisements de K entre deux composantes différentes.

- ▶ La valeur d'entrelacement d'un nœud est 0.

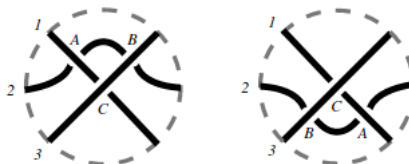
Premiers invariants

- ▶ **Exemple** : La valeur d'entrelacement de l'entrelacs



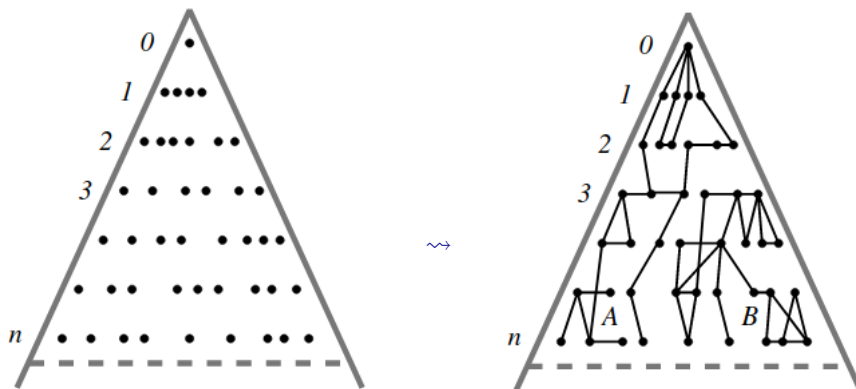
$$\text{est } \text{lk}(K) = \frac{-1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{2} = 1.$$

- ▶ **Théorème** : La valeur d'entrelacement est un entier, et c'est un invariant d'entrelacs orientés.
- ▶ Esquisse de preuve de l'invariance:
 - ▶ La valeur d'entrelacement est invariante par isotopie de l'espace.
 - ▶ On montre qu'elle est invariante par les mouvements de Reidemeister:
 - ▶ R_1 n'ajoute aucune contribution car il concerne des croisements de la même composante.
 - ▶ R_2 apporte 0 car soit les deux brins sont de la même composante, soit on a un croisement positif et un négatif qui s'opposent.
 - ▶ R_3 apporte la même contribution:



Algorithme de classification

- ▶ **Question** : Le théorème de Reidemeister permet-il de générer des tables de nœuds en identifiant ceux qui sont équivalents ?
- ▶ Fixons $n \in \mathbb{N}$: on veut générer la table des nœuds qui peuvent être représentés par des diagrammes avec n croisements ou moins.
- ▶ On peut générer les diagrammes à n croisements en dessinant n croisements à la suite et en choisissant comment relier leurs $4n$ extrémités sans créer de nouveau croisement.
 - ▶ **Problème** : Comment savoir si deux nœuds ainsi construits sont égaux ?
- ▶ On peut arranger ces diagrammes dans une pyramide de hauteur n , et ajouter une arête connectant les diagrammes reliés par des mouvements de Reidemeister:



- ▶ Il semble y avoir deux composantes connexes A et B , représentant des classes de nœuds équivalents.

Algorithme de classification

- ▶ C'est en réalité faux: un diagramme D de A peut représenter le même nœud qu'un diagramme D' de B .
 - ▶ Il peut exister D'' tel que D'' a plus de n croisements et $D'' \equiv_R D$, $D'' \equiv_R D'$.
 - ▶ **Exemple** : Il existe un nœud à 7 croisements équivalent au nœud trivial qui ne peut être réduit par R_1 ni R_2 dans la direction diminuant les croisements, et qui ne peut être transformé par R_3 .
- ▶ Pour un tel algorithme, il faudrait l'existence:
 - ▶ Une fonction $f(n)$ telle que tous les diagrammes avec moins de n croisements peuvent être reliés par des R -moves, en utilisant que des diagrammes avec au plus $f(n)$ croisements.
 - ▶ Une fonction $R(n)$ bornant le nombre de R -moves nécessaires pour relier deux diagrammes avec moins de n -croisements du même nœud.

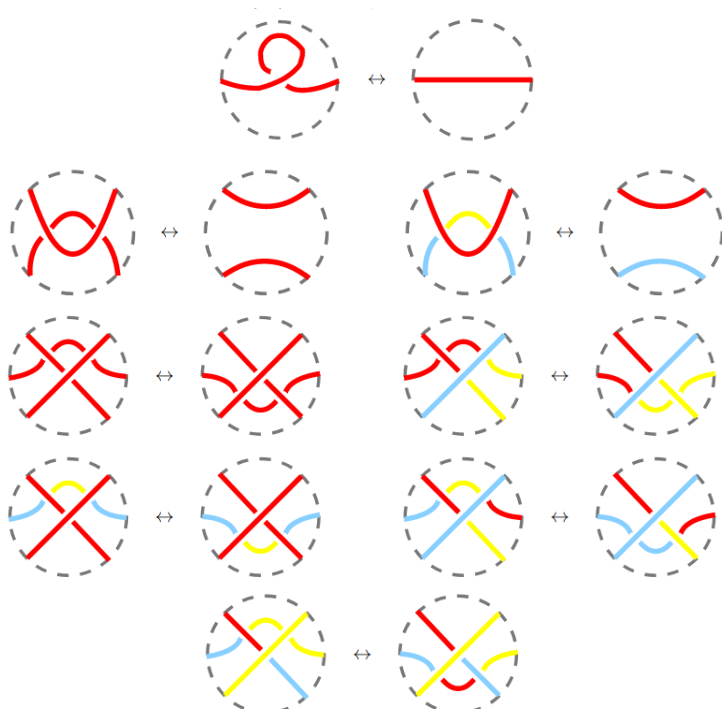
Theorem (Coward–Lackenby, 2010) : Si D et D' sont des diagrammes du même nœud avec moins de n croisements, il existe une suite de R -moves reliant D et D' de longueur inférieure à

$$R(n) := 2^{10^{11}n}.$$

II. Invariants de coloriage

3-coloriages

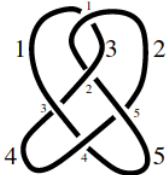
- ▶ L'invariant d'entrelacs (utile en pratique) le plus simple est le nombre de **3-coloriages** d'un nœud K .
- ▶ Soit $I = \{\text{bleu}(b), \text{rouge}(r), \text{jaune}(j)\}$ un ensemble de 3-couleurs.
- ▶ Soit D un diagramme d'entrelacs (non-orienté). On fixe une couleur de I pour chaque arc de D . Un 3-coloriage est le choix d'un tel assignement vérifiant:
 - ▶ Pour chaque croisement de D , les trois arcs incidents sont soit tous de la même couleur, soit tous de couleurs différentes.
- ▶ **Théorème** : Le nombre de 3-coloriages est un invariant d'entrelacs.



3-coloriages

- ▶ Soit D un diagramme avec m arcs A_1, \dots, A_m et ℓ croisements C_1, \dots, C_ℓ . On note $T(D)$ l'ensemble des 3-coloriages de D .
- ▶ **Question :** Comment caractériser un élément de $T(D)$?
- ▶ Notons $I = \{0, 1, 2\}$. A chaque croisement entre les arcs A_i, A_j, A_k , les trois couleurs (x_i, x_j, x_k) doivent être:
 - ▶ un des triplets $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2)$,
 - ▶ une permutation de $(0, 1, 2)$.
 - ▶ Ce sont les $(x_i, x_j, x_k) \in \{0, 1, 2\}^3$ tels que $x_i + x_j + x_k = 0$.
- ▶ $T(D) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{F}_3^m \mid x_i + x_j + x_k = 0 \text{ à chaque croisement entre les arcs } A_i, A_j, A_k\}$ est un \mathbb{F}_3 -espace vectoriel, donné par les solutions de ℓ équations homogènes en m inconnues.
- ▶ Comment calculer $\tau(D) = |T(D)|$? On associe à D une matrice M_D de $\mathcal{M}_{\ell \times m}(\mathbb{F}_3)$ dont les entrées sont données par
 - ▶ 1 si l'arc A_k est incident au croisement C_i ,
 - ▶ 0 sinon.

▶ **Exemple :**



\rightsquigarrow

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ $\dim(T(D)) = \dim(\text{Ker}(M_D))$, et $\tau(D) = 3^{\dim(T(D))}$.

Extension aux p -coloriages

- ▶ Soit $p \in \mathbb{P}$. On considère un ensemble $I = \{0, 1, \dots, p-1\}$ à p couleurs.
- ▶ Soit $T_p(D)$ l'ensemble des coloriages des arcs d'un diagramme D avec les éléments de I tel que à chaque croisement (A_i, A_j, A_k) de couleurs (x_i, x_j, x_k) , avec A_i le croisement au-dessus et A_j, A_k les deux arcs dessous, l'équation

$$2x_i - x_j - x_k \quad \text{est satisfaite dans } \mathbb{F}_p.$$

- ▶ **Théorème :** $T_p(D)$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel, et si deux diagrammes D et D' représentent des entrelacs équivalents, $T_p(D) \simeq T_p(D')$.
Le nombre de p -coloriages $\tau_p(D) := |T_p(D)|$ est une puissance de p , et est un invariant d'entrelacs.
- ▶ L'invariant $\{\tau_p\}_{p \in \mathbb{P}}$ est assez fort: un invariant τ_p peut ne pas permettre de distinguer deux nœuds tandis qu'un $\tau_{p'}$ le permettra.
- ▶ τ_3 ne permet pas de distinguer le nœud en huit (4_1) du nœud trivial puisque $\tau_3(4_1) = 3$ et $\tau_3(0_1) = 3$, alors que τ_5 si:

$$\tau_5(4_1) = 25, \quad \tau_5(0_1) = 5.$$

- ▶ Cependant, il existe des nœuds K et K' non équivalents tels quel $\tau_p(K) = \tau_p(K')$ pour tout $p \in \mathbb{P}$.

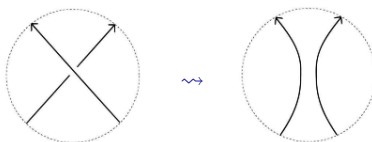
III. Polynôme d'Alexander

- ▶ Invariant de nœud le plus classique, découvert dans les années 1920 via l'homologie de surfaces et les matrices de Seifert.
- ▶ Il existe depuis d'autres approches pour calculer le polynôme d'Alexander, dont une fournie par le polynôme de Conway.

Surfaces de Seifert

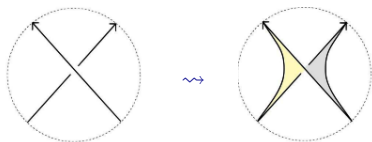
- ▶ Une surface F engendre un entrelacs K si $\partial(F)$ est isotopiquement équivalente à K . Le **genre** d'un entrelacs L est le genre minimal de l'ensemble des surfaces orientées et connexes qui engendrent L .
- ▶ **Théorème (Seifert, 1934)** : Chaque entrelacs orienté est la frontière d'au moins une surface orientable.
- ▶ **Algorithme de Seifert** : Soit L un entrelacs orienté.

1) On lisse chaque croisement de L :



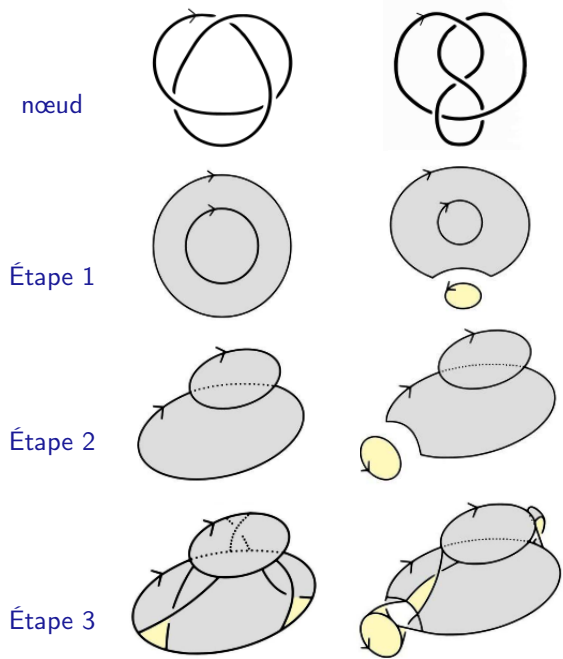
Le diagramme devient un ensemble de boucles disjointes, nommées **cercles de Seifert**, chaque cercle héritant de l'orientation du diagramme de K .

- 2) On donne aux disques superposés de la hauteur: un disque situé dans un autre disque sera situé plus haut que ce dernier.
- 3) Entre les disques, on insère un rectangle tordu d'un $1/2$ -tour à chaque endroit où il y a un croisement dans K . On choisit l'orientation de manière à ce que le croisement formé par les côtés du rectangle soit identique au croisement qu'il remplace:

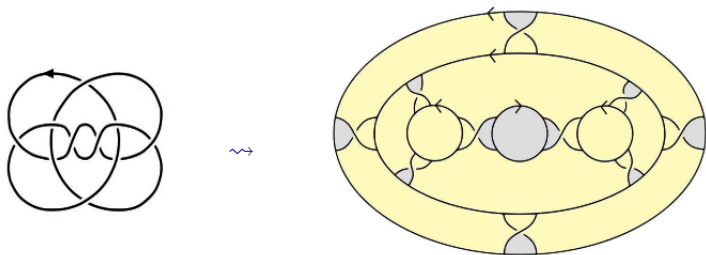


Exemples

► Deux exemples:

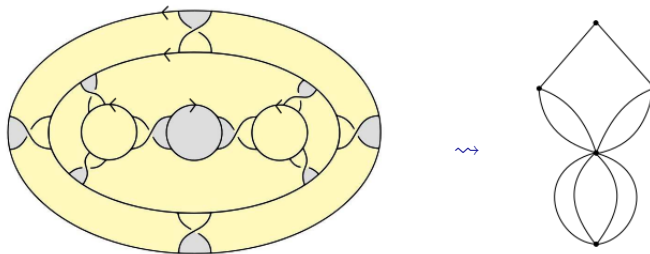


► Exemple de jeu : Le nœud 10_{165} :



1er groupe d'homologie d'une surface de Seifert

- ▶ Le polynôme d'Alexander d'un entrelacs L est calculé à partir d'une matrice définie par les boucles génératrices de $H_1(F)$, le 1er groupe d'homologie simpliciale d'une surface de Seifert F de L .
- ▶ **Théorème** : $H_1(F)$ ne dépend pas de la triangulation choisie pour F , et possède un nombre fini de générateurs.
- ▶ Comment calculer une base de $H_1(F)$? On peut le faire à partir d'un **graphe de Seifert**.
- ▶ C'est un graphe construit à partir d'une surface de projection de Seifert comme suit:
 - ▶ On associe à chaque cercle de Seifert de la surface un sommet dans le graphe.
 - ▶ On trace une arête entre deux sommets si les cercles de Seifert correspondants sont reliés par une bande tordue.
- ▶ **Exemple** : Pour la surface construite précédemment:



- ▶ **Théorème** : $H_1(F) \simeq H_1(G_F)$, où G_F est un graphe de Seifert de F .

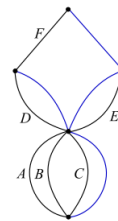
1er groupe d'homologie d'une surface de Seifert

► On sait calculer une base de $H_1(G)$ pour un graphe de Seifert:

- Fixons un arbre couvrant de T de G , c'est à dire un arbre maximal contenu dans G .
- Pour chaque arête $e_i \notin T$, le graphe $T \cup \{e_i\}$ contient un unique circuit: soit z_i le 1-cycle représentant ce circuit.
- L'ensemble des 1-cycles ainsi trouvés forme une base de $H_1(G)$, et donc une base de $H_1(F)$.

► **Exemple** : Reprenons l'exemple précédent, on avait un graphe donné par

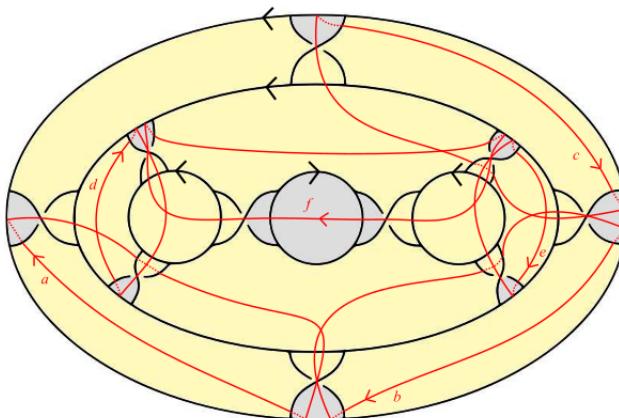
► Un arbre couvrant T est fixé en bleu: il manque les arêtes $\{A, B, C, D, E, F\}$.



► Une base de $H_1(G)$ est ainsi donnée par les circuits/1-cycles:

$$T \cup A := a, T \cup B := b, T \cup C := c, \quad T \cup D := d, T \cup E := e, T \cup F := f.$$

► On peut remonter ces circuits en des boucles de la surface de Seifert, donnant une base de $H_1(F)$:



Matrices de Seifert

- ▶ Soit F une surface de Seifert d'un entrelacs L . On va 'gonfler' la surface F , en considérant un homéomorphisme $b : F \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $b(F \times \{0\})$ est situé au dessus du côté positif de F et $b(F \times \{-1\})$ soit au dessus du côté négatif.
- ▶ Tout $X \subset F$ peut être soulevé à l'extérieur de la surface d'un côté comme de l'autre: $X^+ := b(X \times \{1\})$ et $X^- := b(X \times \{-1\})$.

- ▶ On considère la fonction Θ , appelée **fonction de couplage de Seifert**, définie par

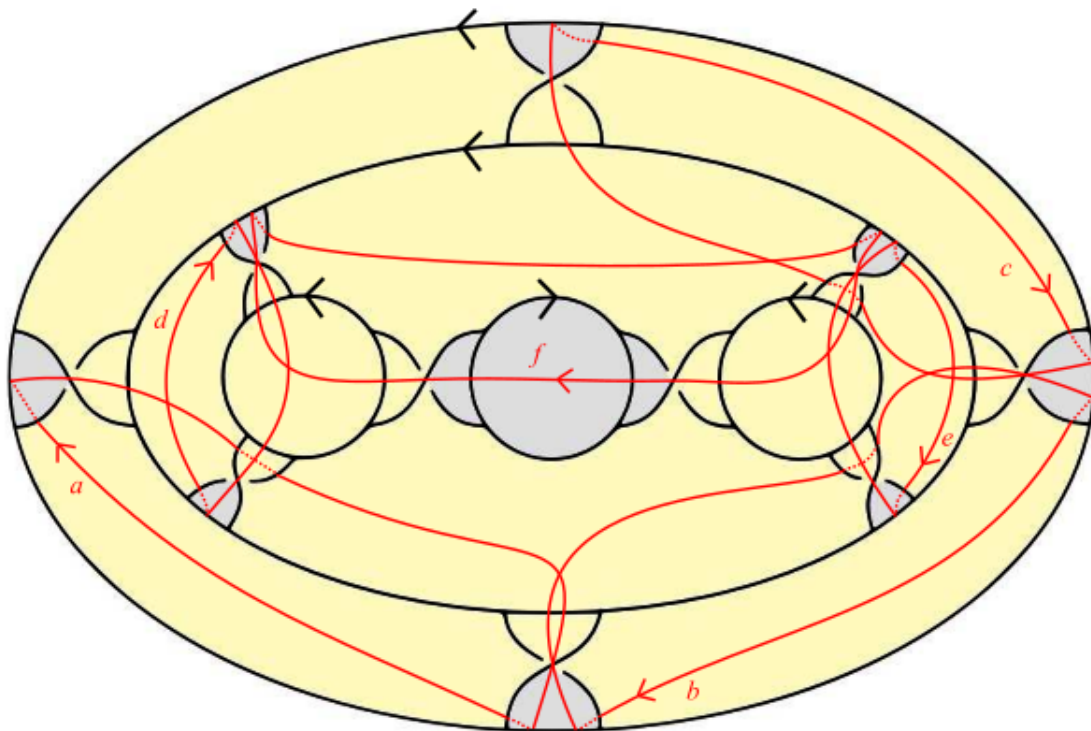
$$\begin{aligned} \Theta : H_1(F) \times H_1(F) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto \text{lk}((a, b^+)) \end{aligned}$$

- ▶ Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de $H_1(F)$. La **matrice de Seifert** est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ définie par

$$m_{i,j} = \Theta(e_i, e_j)$$

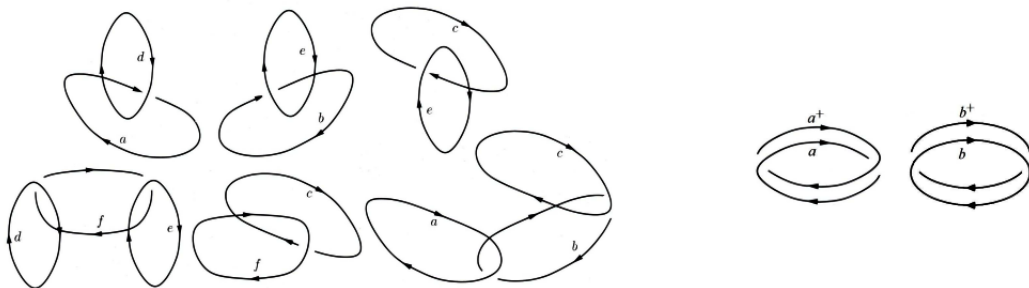
- ▶ **Remarque** : Une telle matrice dépend de F , du plongement de F dans \mathbb{R}^3 et de la base de $H_1(F)$. Pour une même surface et un même plongement, on transforme M en une autre matrice (pour une autre base de $H_1(F)$) par une transformation $M \rightarrow {}^tMP$.

Exemple de matrice de Seifert



Exemple de matrice de Seifert

- ▶ Reprenons l'exemple: on a une base $\{a, b, c, d, e, f\}$ de $H_1(F)$.
- ▶ On doit calculer $\text{lk}(e_i, e_j^+)$ pour tout $e_i, e_j \in \{a, b, c, d, e, f\}$. Il y a trois cas possibles:
 - ▶ Si les projections de e_i et e_j sont disjointes, $\text{lk}(e_i, e_j^+) = \text{lk}(e_j, e_i^+) = 0$. Cela règle les boucles (a, c) , (a, e) , (a, f) , (b, d) , (b, f) , (c, d) et (d, e) .
 - ▶ Si $i \neq j$ et e_i, e_j sont non distinctes, on dessine les projections en dessinant les intersections avec des croisements pleins:



- ▶ Si $i = j$, on dessine les boucles e_i et e_i^+ et on regarde la nature des croisements.
- ▶ On obtient par ex. $\text{lk}(a, d^+) = 0$, $\text{lk}(d, a^+) = 1$, $\text{lk}(a, a^+) = 1$, $\text{lk}(c, c^+) = 0$, d'où la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminant, signature et polynôme d'Alexander

- ▶ Soit L un entrelacs et M une matrice de Seifert de L . Le **déterminant** de L , noté $\det(L)$ est $|\det(M + {}^tM)|$.
- ▶ La **signature** de L , notée $\sigma(L)$, est $\sigma(M + {}^tM)$.
- ▶ **Théorème** : Le déterminant et la signature sont des invariants d'entrelacs, qui dépendent uniquement de l'entrelacs.
- ▶ Soit M une matrice de Seifert d'un entrelacs orienté L , alors tM est une matrice de Seifert de l'entrelacs $-L$ et $-M$ est une matrice de Seifert de L^* .
- ▶ **Théorème** :
 - ▶ $\det(-L) = \det(L) = \det(L^*)$.
 - ▶ $\sigma(-L) = \sigma(L)$,
 - ▶ $\sigma(L^*) = -\sigma(L)$.
- ▶ Le **polynôme d'Alexander** d'un entrelacs L , noté $\Delta_L(x)$ est le déterminant $\det(xM - x^{-1}{}^tM)$ où M est une matrice de Seifert de L .

- ▶ **Exemple** : Pour le nœud 10_{165} :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \Delta_{10_{165}}(x) = 3x^4 - 11x^2 + 17 - 11x^{-2} + 3x^{-4}.$$

- ▶ **Théorème** : Le polynôme d'Alexander est un invariant des entrelacs.
- ▶ Il ne permet pas de distinguer tous les nœuds: par exemple on peut montrer que $\Delta(7_4) = 4x^2 - 7 + 4x^{-2} = \Delta(9_2)$.

La relation écheveau d'Alexander et le polynôme de Conway

- ▶ On dit qu'on **inverse** (resp. **lisse**) un croisement si on transforme D_+ en D_- ou vice-versa (resp. si on transforme D_+ ou D_- en D_0) comme ci-dessous:



- ▶ **Théorème** : Si trois entrelacs L_+ , L_- et L_0 diffèrent uniquement d'un croisement (ils contiennent respectivement D_+ , D_- et D_0), alors

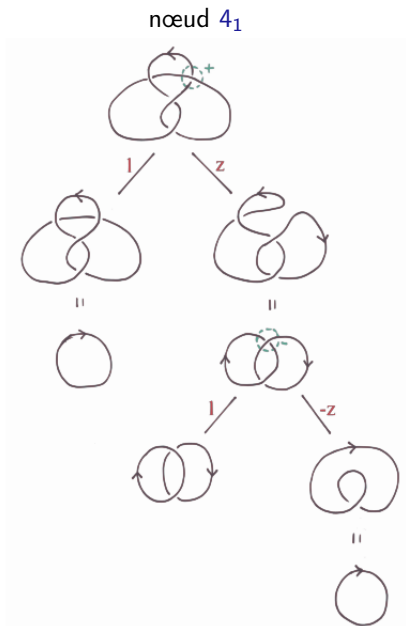
$$\Delta_{L_+}(x) - \Delta_{L_-}(x) = (x^{-1} - x)L_0.$$

- ▶ Une telle relation est appelée relation **écheveau**. Ce genre de relations est souvent utilisée pour calculer des invariants.
- ▶ Le **polynôme de Conway** d'un entrelacs orienté L , noté $\Lambda_L(z)$ est défini par les règles suivantes:
 1. $\Lambda_L(z)$ est invariant par les isotopies ambiantes de l'entrelacs.
 2. Normalisation: $\Lambda_{0_1}(z) = 1$.
 3. Relation écheveau: $\Lambda_{L_+}(z) - \Lambda_{L_-}(z) = z\Lambda_{L_0}(z)$.
- ▶ Ces trois axiomes sont suffisants pour calculer $\Lambda_L(z)$ de façon récursive, et indépendamment des transformations opérées sur les croisements.
- ▶ Si on fait un changement de variable $z = x^{-1} - x$, le polynôme de Conway correspond au polynôme d'Alexander. Donc c'est un invariant, et c'est le même ! C'est en 1969 que Conway a donné cette définition axiomatique.

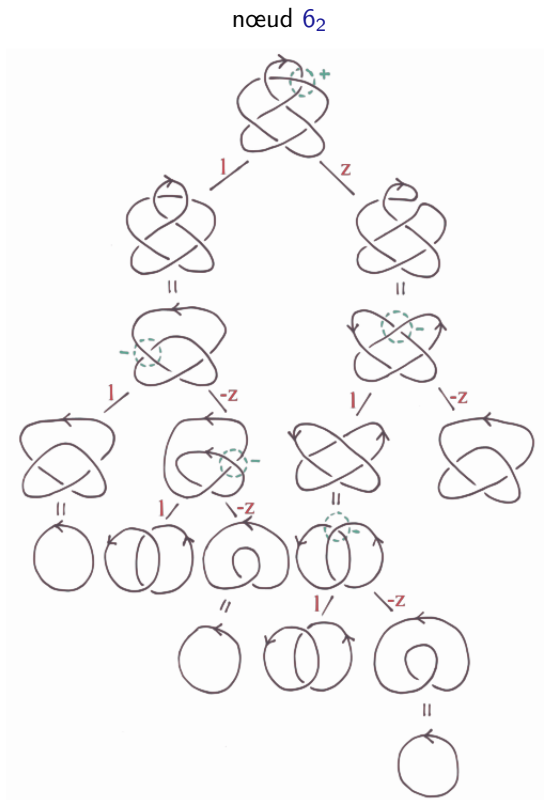
Exemples de polynômes de Conway

► En pratique, on peut calculer le polynôme de Conway en construisant l'**arbre de résolution**.

► Exemples :



$$\Lambda_{4_1}(z) = 1 \times 1 + z(1 \times 0 - z \times 1) = 1 - z^2$$

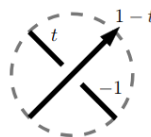


$$\Lambda_{6_2}(z) = 1 - z^2 - z^4$$

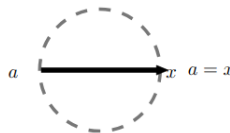
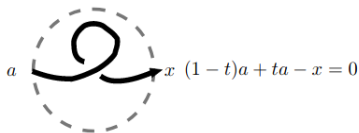
Une autre approche combinatoire

- ▶ Les notes *Knot knots* donnent une autre approche pour calculer le polynôme d'Alexander pour un entrelacs orienté, basée sur les coloriages et l'algèbre linéaire.
- ▶ Fixons $t \in \mathbb{C}^*$. On considère des coloriages des arcs A_i de L par des nombres $x_i \in \mathbb{C}$ tels que, à chaque croisement, les couleurs x, y et z des arcs incidents au-dessus, à gauche et à droite respectivement satisfont

$$(1-t)x + ty - z = 0$$



- ▶ Soit un diagramme D , et $T_t(D)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel contenant les solutions de ces équations à chaque croisement, et $n_t(D) = \dim T_t(D)$, qui est la dimension du noyau de la matrice associée au système d'équations obtenu.
- ▶ **Théorème** : Pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, $n_t(D)$ est invariant par les mouvements de Reidemeister, et donc est un invariant d'entrelacs orienté.
- ▶ Exemple pour $R1$:



- ▶ On peut ainsi associer à un nœud une matrice dont les coefficients sont $0, -1, t, 1-t$, et calculer son déterminant: cela donne un polynôme en t , qui semble être à un facteur t près le polynôme d'Alexander.

$$\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1-t & t \\ t & -1 & 1-t \\ 1-t & t & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow t^2 - t + 1$$

IV. Le polynôme de Jones

- ▶ Invariant découvert par Jones en 1984, en étudiant des algèbres d'opérateurs. N'est pas relié à la topologie de dimension 3.
- ▶ Depuis la découverte de Jones, cela donné à de nouvelles perspectives, créant la **topologie quantique**.
- ▶ C'est un invariant beaucoup plus puissant que les précédents. Il permet notamment de distinguer des nœuds de leurs miroirs.
- ▶ On va utiliser l'approche utilisée par Kauffman, développé un an après Jones, plus simple.

Le crochet de Kauffman

- ▶ Soit A une indéterminée. Le **crochet de Kauffman** d'un entrelacs non-orienté L est un polynôme de Laurent $\in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ défini par les règles récursives suivantes:

- ▶ C'est invariant par isotopie plane de diagrammes.
- ▶ Il satisfait la relation écheveau (locale) suivante:

$$\langle \text{Diagramme à croisement} \rangle = A \langle \text{Diagramme à arc droit} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagramme à arc gauche} \rangle$$

- ▶ Il satisfait $\langle D \sqcup 0_1 \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$, où \sqcup désigne un entrelacs à deux composantes disjointes.
- ▶ Il satisfait la condition $\langle \bigcirc \rangle = 1$.

Exemples :

- ▶ $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2})$.
- ▶ $\langle \text{Figure 8} \rangle = A \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle \text{Figure 8 inversé} \rangle = A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$.
- ▶ $\langle \text{Figure 8 inversé} \rangle = A \langle \text{Figure 8} \rangle + A^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle = A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) = -A^{-3}$.

- ▶ Le crochet de Kauffmann n'est pas un invariant d'entrelacs: les deux derniers exemples sont équivalents au nœud trivial et n'ont pas le même crochet.

- ▶ Il n'est pas stable par Reidemeister 1:

$$\langle \text{Diagramme R1} \rangle = A \langle \text{Diagramme R1a} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagramme R1b} \rangle = (-A^3) \langle \text{Diagramme R1c} \rangle$$

$$\langle \text{Diagramme R1} \rangle = A \langle \text{Diagramme R1a} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagramme R1b} \rangle = (-A^{-3}) \langle \text{Diagramme R1c} \rangle$$

Le crochet de Kauffmann

- ▶ Il est stable par Reidemeister 2 et 3:

$$\langle \text{crossings} \rangle = A^2 \langle \text{configuration 1} \rangle + A^{-2} \langle \text{configuration 2} \rangle$$

- ▶ **Exemple** : Pour le nœud de trèfle à gauche:

$$\begin{aligned} \langle \text{trefoil} \rangle &= A \langle \text{crossing 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing 2} \rangle \\ &= A \left[A \langle \text{crossing 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing 2} \rangle \right] + A^{-1} \left[A \langle \text{crossing 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{crossing 4} \rangle \right] \\ &= A^2 (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{link 1} \rangle + 1 \langle \text{link 2} \rangle + 1 \langle \text{link 3} \rangle + A^{-2} \langle \text{link 4} \rangle \\ &= A^7 - A^3 - A^{-5} \end{aligned}$$

- ▶ Le crochet est 'bien défini', *i.e.*, il ne dépend pas de l'ordre choisi des croisements sur lesquels on applique la relation écheveau.
- ▶ Soit D un diagramme d'entrelacs. Un **état** est donné par le choix d'un signe $+1$ où -1 pour chaque croisement de D . Si D a c croisements, il y a 2^c états. Etant donné un état s , on forme un diagramme sD obtenu en lissant les croisements comme ceci:

$$\langle \text{crossing} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{positive smoothing} \rangle \quad \text{if } +1 \text{ or } \langle \text{negative smoothing} \rangle \quad \text{if } -1.$$

- ▶ **Théorème** : $\langle D \rangle = \sum_{s \in \text{St}(D)} A^{\sum s} (-A^2 - A^{-2})^{|sD| - 1}$ où $|sD|$ est le nombre de boucles disjointes de sD .

Le polynôme de Jones

- ▶ Si D est un diagramme d'entrelacs orienté, notons $w(D)$ la quantité $\sum_{c \in C_D} \varepsilon(c)$ où C_D est l'ensemble des croisements de D .

- ▶ Contrairement à $\text{lk}(D)$, pas de $\frac{1}{2}$ et on compte les croisements entre une composante et elle-même.

- ▶ $w(D)$ est invariant par $R2$ et $R3$, et est mutiplié par ± 1 par $R1$.

- ▶ **Théorème** : Le polynôme de Laurent $f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ est un invariant d'entrelacs orienté.

- ▶ Le **polynôme de Jones** est défini par $V_L(t) = f_D(t^{-1/4})$ où D est un diagramme de L , autrement dit:

$$V_L(t) = (-t^{-3/4})^{-w(D)} \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/4}].$$

- ▶ **Théorème** : Le polynôme de Jones satisfait

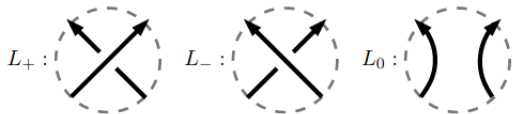
- ▶ C'est un invariant d'entrelacs orienté, et il vit dans $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$.

- ▶ Le polynôme de Jones du nœud trivial est 1.

- ▶ Il satisfait la relation écheveau

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$$

où L_+, L_- et L_0 sont trois diagrammes d'entrelacs qui diffèrent localement par



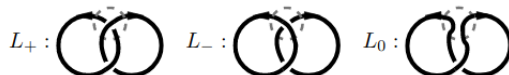
Exemples de polynômes de Jones

- **Exemple** : On peut calculer le polynôme de Jones d'un entrelacs trivial à deux composantes avec la relation écheveau:

$$t^{-1}V_t(\text{link}) - tV_t(\text{link}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V_t(\text{two circles})$$

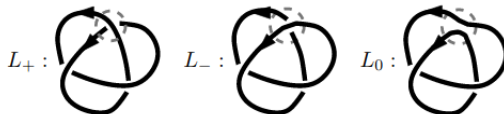
et donc $V_t(\text{two circles}) = -t^{1/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un entrelacs de Hopf:



donc $t^{-1}V_t(\text{Hopf}) - t(-t^{1/2} - t^{-1/2}) = (t^{1/2} - t^{-1/2})$, d'où $V_t(\text{Hopf}) = -t^{-5/2} - t^{-1/2}$.

- **Exemple** : Idem pour un nœud de trèfle à droite:



donc $t^{-1}V_t(\text{right trefoil}) - t = (t^{1/2} - t^{-1/2})(-t^{5/2} - t^{1/2})$, d'où $V_t(\text{right trefoil}) = -t^4 + t^3 + t$.

- Si on fait de même pour le trèfle gauche, on trouve $V_t(L) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$. Donc le nœud trèfle gauche n'est pas miroir !

Propriétés du polynôme de Jones

- ▶ **Théorème** : Soit L un entrelacs orienté et L^* son entrelacs miroir. Alors

$$V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1}).$$

- ▶ Tout entrelacs dont le polynôme de Jones n'est pas stable par permutation $t \leftrightarrow t^{-1}$ n'est pas miroir.

- ▶ **Théorème** : Supposons que I est une fonction de nœuds $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ satisfaisant:

- ▶ C'est un invariant d'entrelacs orienté.

- ▶ La relation écheveau $t^{-1}I(L_+) - tI(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})I(L_0)$ et la normalisation $I(U) = 1$ pour le nœud trivial U .

- ▶ Alors $I_t(L) = V_t(L)$ pour tout entrelacs orienté L .

- ▶ **Question** : Est-ce que le polynôme de Jones est un invariant 'puissant' ?

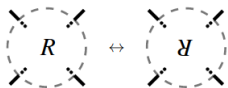
- ▶ Dans la table standard des 249 nœuds avec moins de 10 croisements:

- ▶ Si on regarde τ_3 le nombre de 3-coloriages pour chaque: on trouve 5 valeurs différentes: (3, 9, 27, 81, 243).

- ▶ Si on regarde V_t , on trouve 248 valeurs différentes avec seulement un couple de nœuds distincts qui ont le même polynôme.

- ▶ Dans cette table, on ne distingue pas les nœuds miroirs.

- ▶ Le polynôme de Jones ne permet également pas de distinguer des nœuds qui sont **mutés** l'un en l'autre:



- ▶ **Conjecture** : Le nœud trivial est le seul nœud K tel que $V_t(K) = 1$.

D'autres invariants polynomiaux

- ▶ **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$xP(L_+) + yP(L_-) + zP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(O_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY** (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter).

- ▶ **Théorème** : Il existe un unique invariant $P(L)$ d'entrelacs orienté à valeurs dans $\mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$ qui satisfait la relation écheveau

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(O_1) = 1$$

Il est appelé **polynôme HOMFLY-PT** (pour Przytycki-Traczyk).

- ▶ **L'homologie de Khovanov**, introduite par Khovanov en 1998, est une catégorification du polynôme de Jones. La manière la plus simple de m'exprimer est sous la forme d'un polynôme

$$\text{Kh}_L(q, t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$$

satisfaisant $V_L(q) = \text{Kh}_L(-q^{-1/2}, -1)$.

- ▶ Kronheimer et Mrowka ont prouvé en 2011 que le nœud trivial est l'unique nœud dont l'invariant de Khovanov donne 1.

Merci pour votre attention.