

Une catégorification du polynôme de Jones II

Benjamin Dupont

Groupe de travail sur les groupes de tresses

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

3 Juin 2021

Crochet de Kauffman et state sum formula

- ▶ **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:

- ▶ $\langle U \rangle = 1,$

- ▶ $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1}) \langle L \rangle,$

- ▶ $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = \langle \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \rangle - q \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle$

- ▶ Invariance par isotopie.

Crochet de Kauffman et state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:

- $\langle U \rangle = 1,$

- $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1}) \langle L \rangle,$

- $\langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{cup} \rangle - q \langle \text{cap} \rangle$

- Invariance par isotopie.

- Si L admet k croisements, on va considérer des **résolutions** L_ξ de L pour $\xi \in \{0, 1\}^k$:



Crochet de Kauffman et state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:

- $\langle U \rangle = 1,$

- $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1}) \langle L \rangle,$

- $\langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{cup} \rangle - q \langle \text{cap} \rangle$

- Invariance par isotopie.

- Si L admet k croisements, on va considérer des **résolutions** L_ξ de L pour $\xi \in \{0, 1\}^k$:



- **Kauffman state-sum formula:**

$$\langle L \rangle = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

Erreur dans Partie I

où $|L_\xi|$ est le nombre de boucles disjointes qui composent le diagramme L_ξ .

Crochet de Kauffman et state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:

$$\langle U \rangle = 1,$$

$$\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1}) \langle L \rangle,$$

$$\langle \text{crossing} \rangle = \langle \text{cup} \rangle - q \langle \text{cap} \rangle$$

- Invariance par isotopie.

- Si L admet k croisements, on va considérer des **résolutions** L_ξ de L pour $\xi \in \{0, 1\}^k$:



- **Kauffman state-sum formula:**

$$\langle L \rangle = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

Erreur dans Partie I

où $|L_\xi|$ est le nombre de boucles disjointes qui composent le diagramme L_ξ .

- Le **polynôme de Jones** est défini comme une renormalisation de ce crochet:

$$J(L) = (-1)^{x(L)} \frac{q^{y(L) - 2x(L)}}{q + q^{-1}} \langle L \rangle$$

- $x(L)$ est le nombre de croisements **négatifs** de L , i.e.

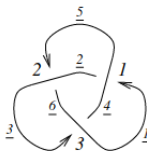


- $y(L)$ est le nombre de croisements **positifs** de L , i.e.

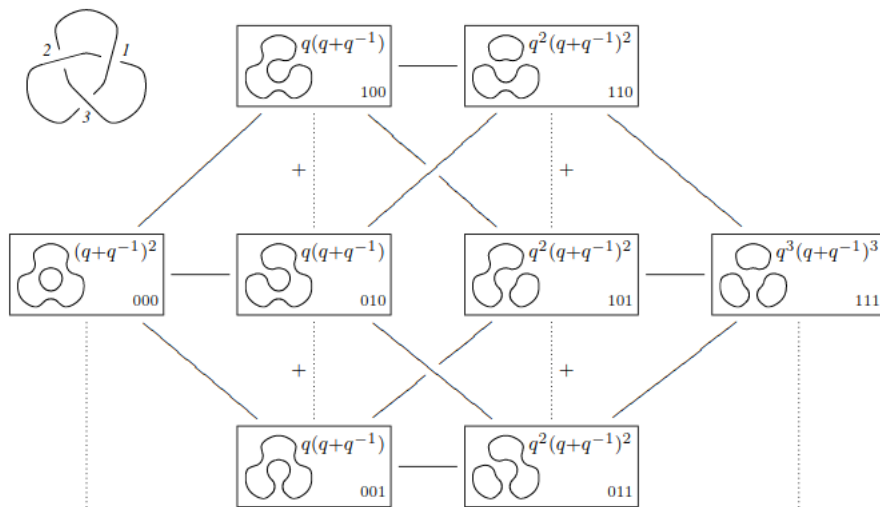


Un exemple

► **Exemple** : Le noeud trèfle droit



$(x(L) = 0, y(L) = 3)$.



(1)

$$\begin{aligned}
 & (q + q^{-1})^2 - 3q(q + q^{-1}) + 3q^2(q + q^{-1})^2 - q^3(q + q^{-1})^3 \\
 = & q^{-2} + 1 + q^2 - q^6 \xrightarrow[\text{(with } (n_+, n_-) = (3, 0))]{\cdot (-1)^{n_+ - n_-}} q + q^3 + q^5 - q^9 \xrightarrow{\cdot (q + q^{-1})^{-1}} J(\mathcal{C}) = q^2 + q^6 - q^8.
 \end{aligned}$$

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- ▶ On a défini une algèbre de Frobenius A , comme un \mathbb{Z} -module de rang 2 engendré par 1 et X (isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$), munie d'une multiplication m , d'une unité $\mathbf{1}$, d'une comultiplication Δ et d'une counité ε .

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- ▶ On a défini une algèbre de Frobenius A , comme un \mathbb{Z} -module de rang 2 engendré par 1 et X (isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$), munie d'une multiplication m , d'une unité 1 , d'une comultiplication Δ et d'une counité ε .
- ▶ On a défini un **TQFT**, c'est à dire un foncteur $F : \mathbf{Cob} \rightarrow R\text{-mod}_0$ par $F(\bigcirc) = A$ et

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \otimes A \xrightarrow{m} A := \begin{cases} 1 \otimes 1 \mapsto 1, & 1 \otimes X \mapsto X, \\ X \otimes X \mapsto 0, & X \otimes 1 \mapsto X, \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A := \begin{cases} 1 \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X, \\ X \mapsto X \otimes X, \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : R \xrightarrow{l} A := \{1 \mapsto 1\} \quad F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \xrightarrow{\varepsilon} R := \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ X \mapsto 1 \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \otimes A \xrightarrow{\sigma} A \otimes A := \{x \otimes y \mapsto y \otimes x\}$$

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- ▶ On a défini une algèbre de Frobenius A , comme un \mathbb{Z} -module de rang 2 engendré par 1 et X (isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$), munie d'une multiplication m , d'une unité 1 , d'une comultiplication Δ et d'une counité ε .
- ▶ On a défini un **TQFT**, c'est à dire un foncteur $F : \mathbf{Cob} \rightarrow R\text{-mod}_0$ par $F(\bigcirc) = A$ et

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \otimes A \xrightarrow{m} A := \begin{cases} 1 \otimes 1 \mapsto 1, & 1 \otimes X \mapsto X, \\ X \otimes X \mapsto 0, & X \otimes 1 \mapsto X, \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A := \begin{cases} 1 \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X, \\ X \mapsto X \otimes X, \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : R \xrightarrow{l} A := \{1 \mapsto \mathbf{1}\} \quad F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \xrightarrow{\varepsilon} R := \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ X \mapsto 1 \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \otimes A \xrightarrow{\sigma} A \otimes A := \{x \otimes y \mapsto y \otimes x\}$$

- ▶ Au diagramme des résolutions d'un entrelacs R , on associe un **cube** dans la catégorie $R\text{-mod}_0$ dont les sommets sont définis par

$$F(L_\xi) = A^{\otimes k}\{-|J|\}$$

où J est le sous-ensemble de l'ensemble des croisements I de L contenant les croisements tels que $\xi_k = 1$.

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- ▶ On a défini une algèbre de Frobenius A , comme un \mathbb{Z} -module de rang 2 engendré par 1 et X (isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$), munie d'une multiplication m , d'une unité 1 , d'une comultiplication Δ et d'une counité ε .
- ▶ On a défini un **TQFT**, c'est à dire un foncteur $F : \mathbf{Cob} \rightarrow R\text{-mod}_0$ par $F(\bigcirc) = A$ et

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \otimes A \xrightarrow{m} A := \begin{cases} 1 \otimes 1 \mapsto 1, & 1 \otimes X \mapsto X, \\ X \otimes X \mapsto 0, & X \otimes 1 \mapsto X, \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A := \begin{cases} 1 \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X, \\ X \mapsto X \otimes X, \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : R \xrightarrow{l} A := \{1 \mapsto 1\} \quad F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \xrightarrow{\varepsilon} R := \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ X \mapsto 1 \end{cases}$$

$$F\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) : A \otimes A \xrightarrow{\sigma} A \otimes A := \{x \otimes y \mapsto y \otimes x\}$$

- ▶ Au diagramme des résolutions d'un entrelacs R , on associe un **cube** dans la catégorie $R\text{-mod}_0$ dont les sommets sont définis par

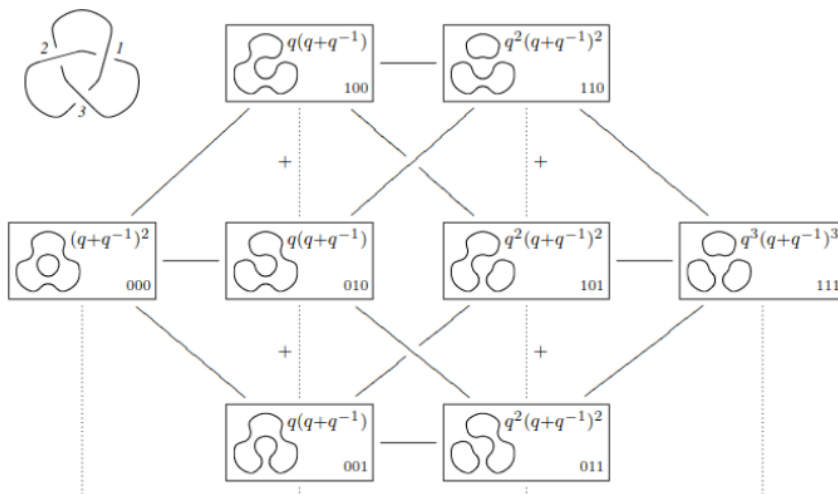
$$F(L_\xi) = A^{\otimes k}\{-|J|\}$$

où J est le sous-ensemble de l'ensemble des croisements I de L contenant les croisements tels que $\xi_k = 1$.

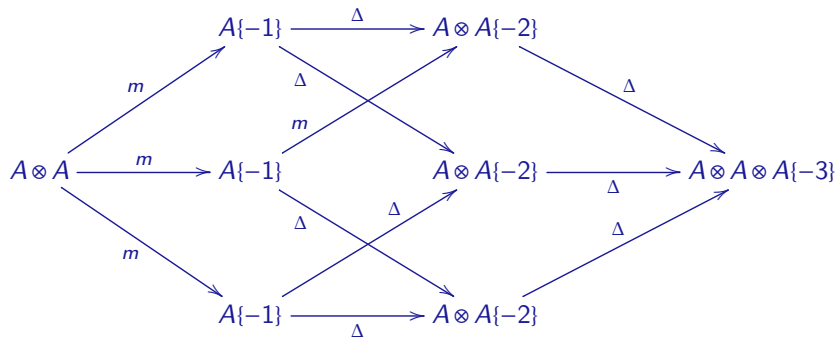
- ▶ Les morphismes de ces cubes sont définis via les cobordismes et le TQFT F .

Exemple: le nœud trèfle droit

- **Exemple** : Pour le nœud trèfle droit,



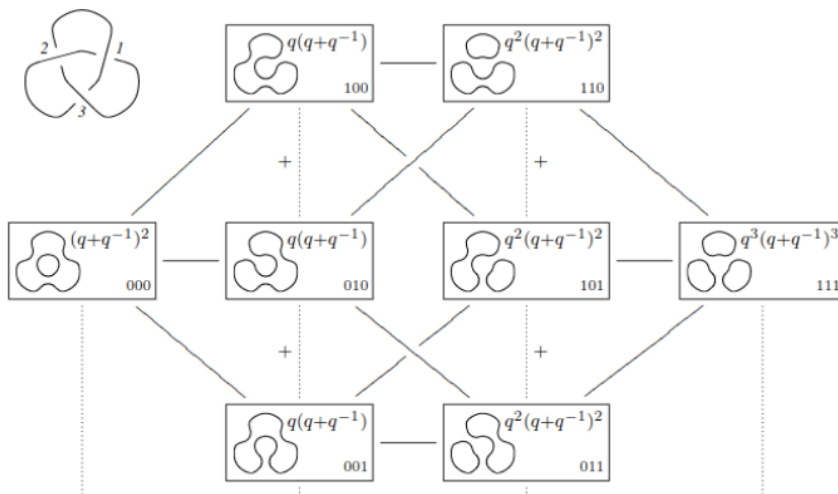
on obtient le cube



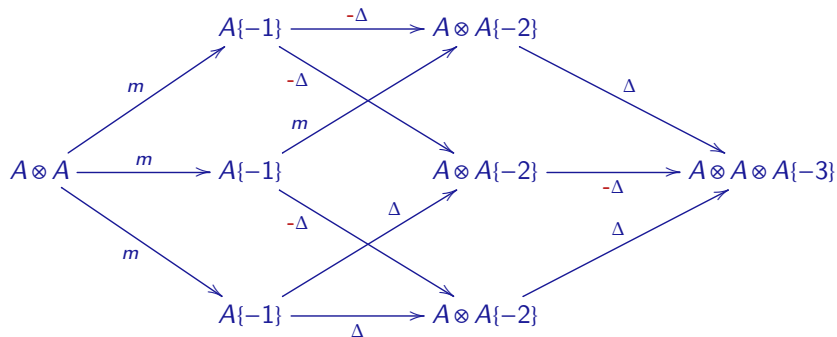
où $A\{n\}_i = A_{i+n}$.

Exemple: le nœud trèfle droit

- **Exemple** : Pour le nœud trèfle droit,



on obtient le cube



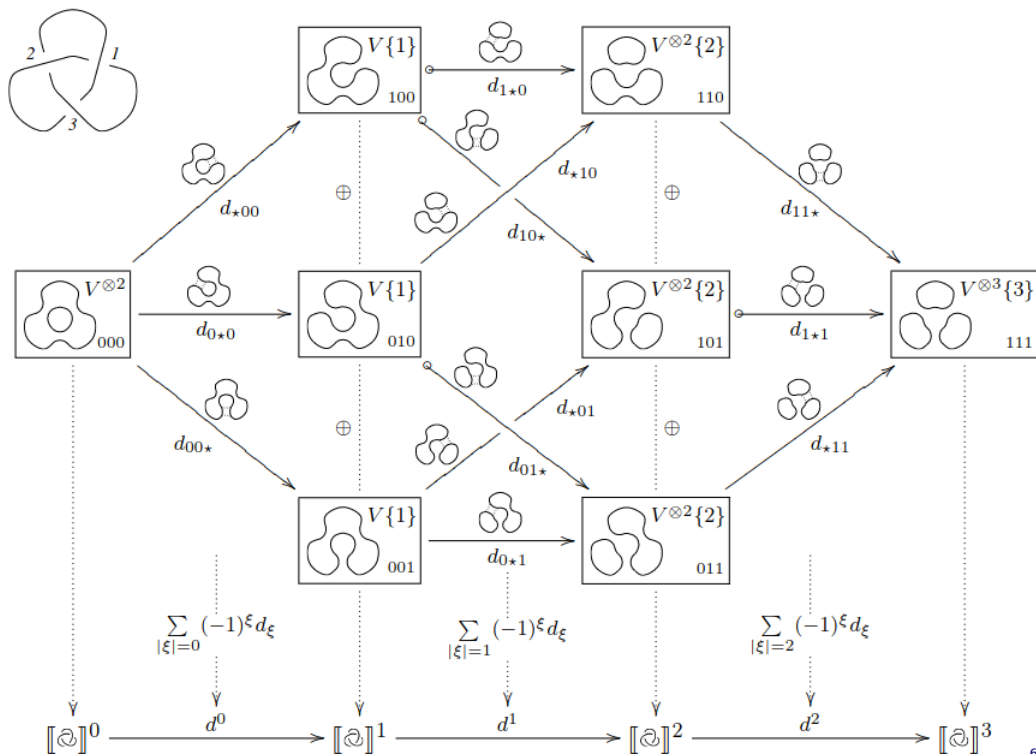
où $A\{n\}_i = A_{i+n}$.

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- On définit le complexe de Khovanov de l'entrelacs L à partir du cube par

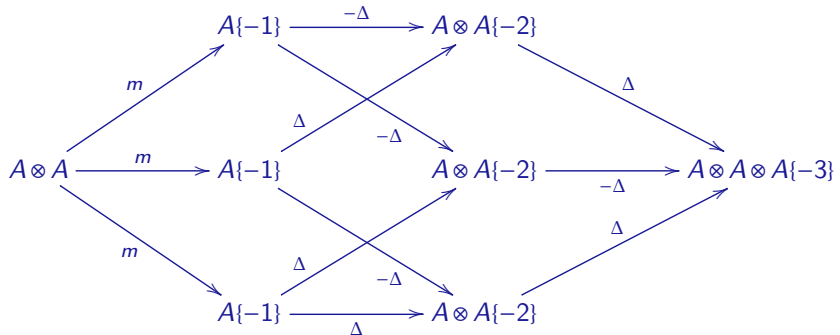
$$\bar{C}^i(L) = \bigoplus_{J \subset I, |J|=i} V(J), \quad d^i: \bar{C}^i(L) \rightarrow \bar{C}^{i+1}(L), \quad x \mapsto d^i(x) = \sum_{|J|=i} (-1)^{\sum_{i < j} \xi_j} d_\xi(x)$$

où j est le nombre de 1 avant l' \star .



Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

► **Exemple** : Pour le nœud de trèfle droit, le cube



donne le complexe

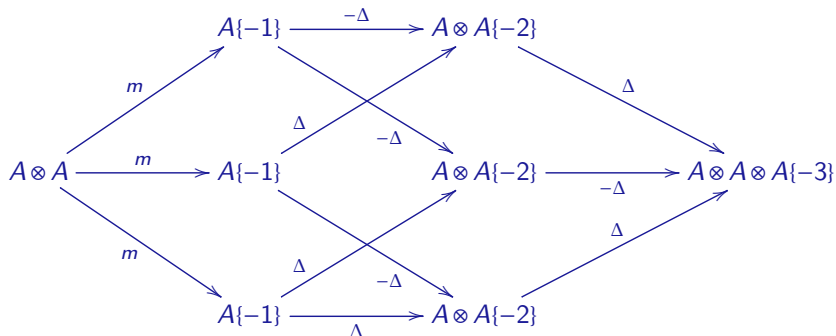
$$0 \rightarrow \bar{C}^0(L) \xrightarrow{d_0} \bar{C}^1(L) \xrightarrow{d_1} \bar{C}^2(L) \xrightarrow{d_2} \bar{C}^3(L) \rightarrow 0$$

$$\bar{C}^0(L) = A \otimes A, \quad \bar{C}^1(L) = A\{-1\} \oplus A\{-1\} \oplus A\{-1\},$$

$$\bar{C}^2(L) = A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\}, \quad \bar{C}^3(L) = A \otimes A \otimes A\{-3\}$$

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- **Exemple** : Pour le nœud de trèfle droit, le cube



donne le complexe

$$0 \rightarrow \bar{C}^0(L) \xrightarrow{d_0} \bar{C}^1(L) \xrightarrow{d_1} \bar{C}^2(L) \xrightarrow{d_2} \bar{C}^3(L) \rightarrow 0$$

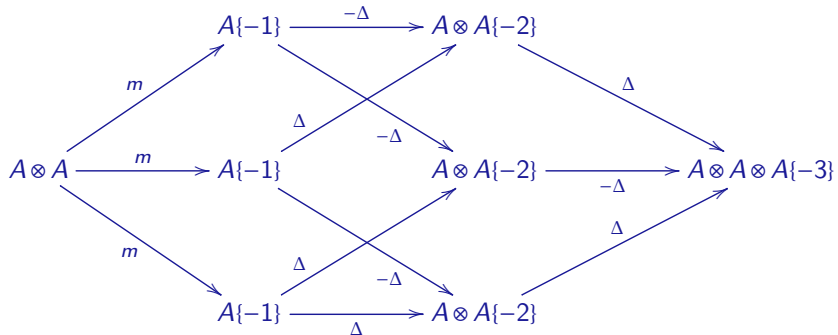
$$\begin{aligned} \bar{C}^0(L) &= A \otimes A, & \bar{C}^1(L) &= A\{-1\} \oplus A\{-1\} \oplus A\{-1\}, \\ \bar{C}^2(L) &= A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\}, & \bar{C}^3(L) &= A \otimes A \otimes A\{-3\} \end{aligned}$$

- Le **complexe de Khovanov** de L est alors défini par le complexe

$$C(L) := \bar{C}(L)[x(L)]\{2x(L) - y(L)\}$$

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- **Exemple** : Pour le nœud de trèfle droit, le cube



donne le complexe

$$0 \rightarrow \bar{C}^0(L) \xrightarrow{d_0} \bar{C}^1(L) \xrightarrow{d_1} \bar{C}^2(L) \xrightarrow{d_2} \bar{C}^3(L) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \bar{C}^0(L) &= A \otimes A, & \bar{C}^1(L) &= A\{-1\} \oplus A\{-1\} \oplus A\{-1\}, \\ \bar{C}^2(L) &= A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\}, & \bar{C}^3(L) &= A \otimes A \otimes A\{-3\} \end{aligned}$$

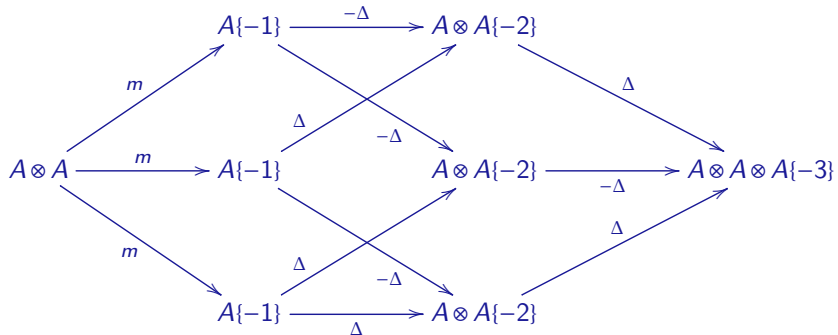
- Le **complexe de Khovanov** de L est alors défini par le complexe

$$C(L) := \bar{C}(L)[x(L)]\{2x(L) - y(L)\}$$

- **Théorème principal** : Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme des R -modules gradués $H^i(L)$ est un invariant de L .

Le complexe de Khovanov d'un entrelacs

- **Exemple** : Pour le nœud de trèfle droit, le cube



donne le complexe

$$0 \rightarrow \overline{C}^0(L) \xrightarrow{d_0} \overline{C}^1(L) \xrightarrow{d_1} \overline{C}^2(L) \xrightarrow{d_2} \overline{C}^3(L) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \overline{C}^0(L) &= A \otimes A, & \overline{C}^1(L) &= A\{-1\} \oplus A\{-1\} \oplus A\{-1\}, \\ \overline{C}^2(L) &= A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\} \oplus A \otimes A\{-2\}, & \overline{C}^3(L) &= A \otimes A \otimes A\{-3\} \end{aligned}$$

- Le **complexe de Khovanov** de L est alors défini par le complexe

$$C(L) := \overline{C}(L)[x(L)]\{2x(L) - y(L)\}$$

- **Théorème principal** : Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme des R -modules gradués $H^i(L)$ est un invariant de L .
- **Preuve** : Il faut prouver que si deux diagrammes d'entrelacs L et L' sont reliés par des mouvements de Reidemeister, les complexes $C(L)$ et $C(L')$ ont la même homologie.

Lien avec le polynôme de Jones

► **Proposition** : Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)} q^{y(L) - 2x(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$$

où $\hat{\chi}(H^i(L))$ est la car. d'Euler graduée de $H^i(L)$. $\hat{\chi}(M) = \text{qdim}(M) = \sum \dim(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^i$

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition** : Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)} q^{y(L) - 2x(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$$

où $\hat{\chi}(H^i(L))$ est la car. d'Euler graduée de $H^i(L)$. $\hat{\chi}(M) = \text{qdim}(M) = \sum \dim(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^i$

- **Esquisse de preuve** :

- Notons que $\hat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n} \hat{\chi}(M)$ pour un R -module gradué de type fini R .
- Pour un complexe borné $M: \dots \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ de R -modules gradués de type fini, on définit

$$\hat{\chi}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(M)).$$

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition** : Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{\chi(L)} q^{y(L) - 2x(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$$

où $\hat{\chi}(H^i(L))$ est la car. d'Euler graduée de $H^i(L)$. $\hat{\chi}(M) = \text{qdim}(M) = \sum \dim(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^i$

- **Esquisse de preuve** :

- Notons que $\hat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n} \hat{\chi}(M)$ pour un R -module gradué de type fini R .
- Pour un complexe borné $M: \dots \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ de R -modules gradués de type fini, on définit

$$\hat{\chi}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(M)).$$

- Puisque $\hat{\chi}(C(L)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $K(L) = (1 - q^2) \hat{\chi}(C(D))$.

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition** : Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{\chi(L)} q^{y(L) - 2x(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$$

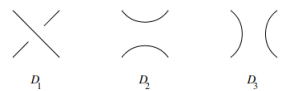
où $\hat{\chi}(H^i(L))$ est la car. d'Euler graduée de $H^i(L)$. $\hat{\chi}(M) = \text{qdim}(M) = \sum \dim(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^i$

- **Esquisse de preuve** :

- Notons que $\hat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n} \hat{\chi}(M)$ pour un R -module gradué de type fini R .
- Pour un complexe borné $M: \dots \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ de R -modules gradués de type fini, on définit

$$\hat{\chi}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(M)).$$

- Puisque $\hat{\chi}(C(L)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $K(L) = (1 - q^2) \hat{\chi}(C(D))$.

- Pour des diagrammes D_1, D_2 et D_3 qui diffèrent via: , le complexe

$\overline{C}(D_1)$ est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes $\overline{C}(D_2) \rightarrow \overline{C}(D_3)\{-1\}$. Donc

$$\hat{\chi}(\overline{C}(D_1)) = \hat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - \hat{\chi}(\overline{C}(D_3)\{-1\}) = \hat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - q \hat{\chi}(\overline{C}(D_3))$$

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition** : Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{\text{x}(L)} q^{y(L) - 2\text{x}(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$$

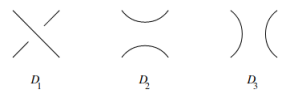
où $\hat{\chi}(H^i(L))$ est la car. d'Euler graduée de $H^i(L)$. $\hat{\chi}(M) = \text{qdim}(M) = \sum \dim(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^i$

- **Esquisse de preuve** :

- Notons que $\hat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n} \hat{\chi}(M)$ pour un R -module gradué de type fini R .
- Pour un complexe borné $M: \dots \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ de R -modules gradués de type fini, on définit

$$\hat{\chi}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(M)).$$

- Puisque $\hat{\chi}(C(L)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $\mathbf{K}(L) = (1 - q^2) \hat{\chi}(C(D))$.

- Pour des diagrammes D_1 , D_2 et D_3 qui diffèrent via: , le complexe

$\overline{C}(D_1)$ est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes $\overline{C}(D_2) \rightarrow \overline{C}(D_3)\{-1\}$. Donc

$$\hat{\chi}(\overline{C}(D_1)) = \hat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - \hat{\chi}(\overline{C}(D_3)\{-1\}) = \hat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - q \hat{\chi}(\overline{C}(D_3))$$

- D'autre part, $\langle D_1 \rangle = \langle D_2 \rangle - q \langle D_3 \rangle$.

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition** : Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)} q^{y(L) - 2x(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$$

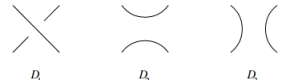
où $\hat{\chi}(H^i(L))$ est la car. d'Euler graduée de $H^i(L)$. $\hat{\chi}(M) = \text{qdim}(M) = \sum \dim(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^i$

- **Esquisse de preuve** :

- Notons que $\hat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n} \hat{\chi}(M)$ pour un R -module gradué de type fini R .
- Pour un complexe borné $M: \dots \rightarrow M^i \rightarrow M^{i+1} \rightarrow \dots$ de R -modules gradués de type fini, on définit

$$\hat{\chi}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(M)).$$

- Puisque $\hat{\chi}(C(L)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \hat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $K(L) = (1 - q^2) \hat{\chi}(C(D))$.

- Pour des diagrammes D_1 , D_2 et D_3 qui diffèrent via: , le complexe

$\overline{C}(D_1)$ est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes $\overline{C}(D_2) \rightarrow \overline{C}(D_3)\{-1\}$. Donc

$$\hat{\chi}(\overline{C}(D_1)) = \hat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - \hat{\chi}(\overline{C}(D_3)\{-1\}) = \hat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - q \hat{\chi}(\overline{C}(D_3))$$

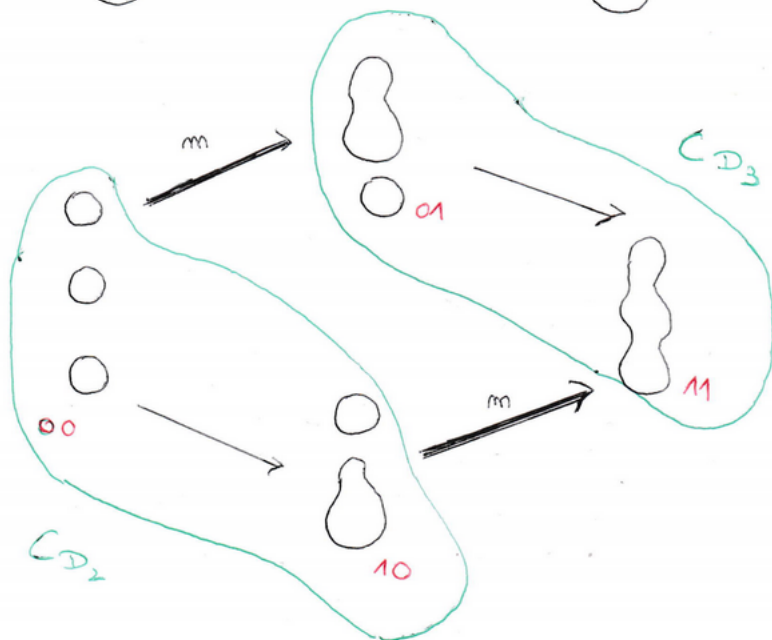
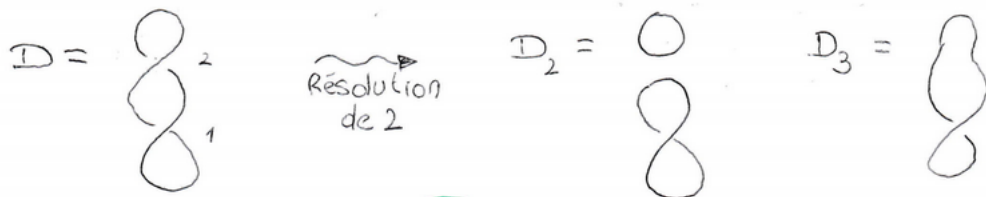
- D'autre part, $\langle D_1 \rangle = \langle D_2 \rangle - q \langle D_3 \rangle$.
- Si D est une réunion disjointe de k cercles, alors

$$\hat{\chi}(\overline{C}(D)) = \hat{\chi}(A^{\otimes k}) = (q + q^{-1})^k \hat{\chi}(R) = \frac{(q + q^{-1})^k}{1 - q^2}$$

et $\langle D \rangle = (q + q^{-1})^k$.

- Puisque $\hat{\chi}(C(D)) = \hat{\chi}(\overline{D}[x(D)]\{2x(D) - y(D)\})$, $\hat{\chi}(C(D)) = (-1)^{x(D)} q^{y(D) - 2x(D)} \hat{\chi}(\overline{C}(D))$.

Une illustration



$$C_D = \text{Cone} (C_{D_2} \xrightarrow{m} C_{D_3})$$

avec les bons décalages.

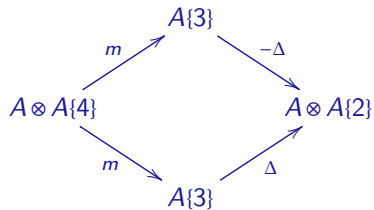
Exemple : l'entrelacs de Hopf

► Considérons $L =$ . On a $x(L) = 2$, $y(L) = 0$.

Exemple : l'entrelacs de Hopf

► Considérons $L =$ . On a $x(L) = 2$, $y(L) = 0$.

► Le cube de résolution est donné, avec le décalage de $\{2x(L) - y(L)\}$, par



Exemple : l'entrelacs de Hopf

► Considérons $L = \text{Hopf link}$. On a $x(L) = 2$, $y(L) = 0$.

► Le cube de résolution est donné, avec le décalage de $\{2x(L) - y(L)\}$, par

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A\{3\} & & \\
 & \nearrow m & & \searrow -\Delta & \\
 A \otimes A\{4\} & & & & A \otimes A\{2\} \\
 & \searrow m & & \nearrow \Delta & \\
 & & A\{3\} & &
 \end{array} \rightsquigarrow 0 \longrightarrow C^{-2}(L) \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1}(L) \xrightarrow{d^{-1}} C^0(L) \xrightarrow{d^0} 0$$

Exemple : l'entrelacs de Hopf

► Considérons $L = \text{Hopf link}$. On a $x(L) = 2$, $y(L) = 0$.

► Le cube de résolution est donné, avec le décalage de $\{2x(L) - y(L)\}$, par

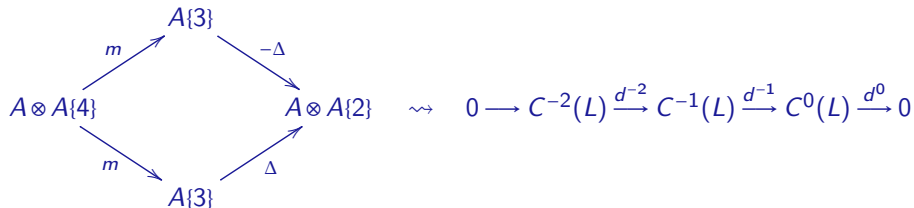
$$\begin{array}{c}
 A\{3\} \\
 \nearrow m \\
 A \otimes A\{4\} \\
 \searrow m \\
 A\{3\}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow -\Delta \\
 A \otimes A\{2\} \\
 \searrow \Delta
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 0 \longrightarrow C^{-2}(L) \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1}(L) \xrightarrow{d^{-1}} C^0(L) \xrightarrow{d^0} 0$$

| | | | |
|-------------------|--|----------------------|--|
| Degré homologique | -2 | -1 | 0 |
| Cycles | $\{1 \otimes x - x \otimes 1, x \otimes x\}$ | $\{(1, 1), (x, x)\}$ | $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes 1, x \otimes x\}$ |
| Bords | | $\{(1, 1), (x, x)\}$ | $\{1 \otimes x + x \otimes 1, x \otimes x\}$ |
| Homologie | $\{1 \otimes x - x \otimes 1, x \otimes x\}$ | $\{0\}$ | $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x\}$ |
| Degrés en q | -4, -6 | | 0, -2 |

Exemple : l'entrelacs de Hopf

► Considérons $L = \text{Hopf link}$. On a $x(L) = 2, y(L) = 0$.

► Le cube de résolution est donné, avec le décalage de $\{2x(L) - y(L)\}$, par

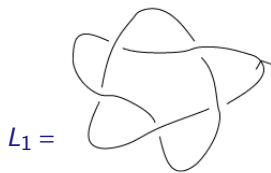


| Degré homologique | -2 | -1 | 0 |
|-------------------|--|----------------------|--|
| Cycles | $\{1 \otimes x - x \otimes 1, x \otimes x\}$ | $\{(1, 1), (x, x)\}$ | $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes 1, x \otimes x\}$ |
| Bords | | $\{(1, 1), (x, x)\}$ | $\{1 \otimes x + x \otimes 1, x \otimes x\}$ |
| Homologie | $\{1 \otimes x - x \otimes 1, x \otimes x\}$ | $\{0\}$ | $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x\}$ |
| Degrés en q | -4, -6 | | 0, -2 |

► Table des $H^{i,j}(L)$, avec i = degré homologique, j = graduation de $H^i(L)$:

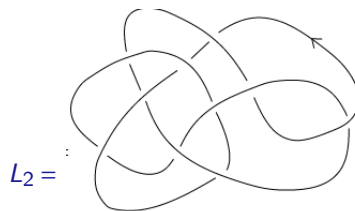
| | -2 | -1 | 0 |
|----|--------------|----|--------------|
| 0 | | | \mathbb{Z} |
| -1 | | | |
| -2 | | | \mathbb{Z} |
| -3 | | | |
| -4 | \mathbb{Z} | | |
| -5 | | | |
| -6 | \mathbb{Z} | | |

Un invariant plus puissant que le polynôme de Jones



$$K(L_1) = q^{-3} + q^{-5} + q^{-7} - q^{-15}$$

| | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|----|--------------|
| -3 | | | | | | \mathbb{Z} |
| -5 | | | | | | \mathbb{Z} |
| -7 | | | | \mathbb{Z} | | |
| -9 | | | | | | |
| -11 | | \mathbb{Z} | \mathbb{Z} | | | |
| -13 | | | | | | |
| -15 | \mathbb{Z} | | | | | |



$$K(L_2) = q^{-3} + q^{-5} + q^{-7} - q^{-15}$$

| | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------------------|--------------|--------------|
| -1 | | | | | | | \mathbb{Z} | \mathbb{Z} |
| -3 | | | | | | | | \mathbb{Z} |
| -5 | | | | | \mathbb{Z} | $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ | | |
| -7 | | | | \mathbb{Z} | | | | |
| -9 | | | | \mathbb{Z} | \mathbb{Z} | | | |
| -11 | | \mathbb{Z} | \mathbb{Z} | | | | | |
| -13 | | | | | | | | |
| -15 | \mathbb{Z} | | | | | | | |

- Voir le papier de Bar Natan pour les calculs de l'homologie de Khovanov des entrelacs à moins de 10 croisements.

III. Invariance par mouvements de Reidemeister

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

- ▶ C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

- ▶ C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes C_1, \dots, C_k tels que

$$C \leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \leftarrow \dots \rightarrow C_k \leftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d'isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

- ▶ C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes C_1, \dots, C_k tels que

$$C \leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \leftarrow \dots \rightarrow C_k \leftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.

- ▶ C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\text{Com}(\mathcal{C})$) si il existe des morphismes $f: C \rightarrow C'$ et $g: C' \rightarrow C$ tels que $g \circ f \sim \text{id}_C$ et $f \circ g \sim \text{id}_{C'}$.

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

- ▶ C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes C_1, \dots, C_k tels que

$$C \leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \leftarrow \dots \rightarrow C_k \leftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.

- ▶ C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\text{Com}(\mathcal{C})$) si il existe des morphismes $f: C \rightarrow C'$ et $g: C' \rightarrow C$ tels que $g \circ f \sim \text{id}_C$ et $f \circ g \sim \text{id}_{C'}$.
- ▶ On a les implications suivantes:

| |
|--|
| Isomorphes \Rightarrow Iso. dans $\text{Com}(\mathcal{C}) \Rightarrow$ Quasi-iso \Rightarrow Iso. dans $D(\mathcal{C}) \Rightarrow$ Même homologie |
|--|

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d'isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

- ▶ C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes C_1, \dots, C_k tels que

$$C \leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \leftarrow \dots \rightarrow C_k \leftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.

- ▶ C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\text{Com}(\mathcal{C})$) si il existe des morphismes $f: C \rightarrow C'$ et $g: C' \rightarrow C$ tels que $g \circ f \sim \text{id}_C$ et $f \circ g \sim \text{id}_{C'}$.
- ▶ On a les implications suivantes:

| |
|--|
| Isomorphes \Rightarrow Iso. dans $\text{Com}(\mathcal{C}) \Rightarrow$ Quasi-iso \Rightarrow Iso. dans $D(\mathcal{C}) \Rightarrow$ Même homologie |
|--|

- ▶ Khovanov a montré dans son article d'origine que les $H^i(L)$ sont des invariants de nœuds en construisant des quasi-isomorphismes entre les complexes $C(D)$ et $C(D')$, si $D \equiv_{R\text{-move}} D'$.

Digression: morphismes de complexes

- ▶ Soit \mathcal{C} une catégorie, et C, C' deux complexes de $\text{Com}(\mathcal{C})$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d'isomorphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ de \mathcal{C} tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{array}{ccc} C_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} & C'_{i+1} \\ d_C \downarrow & & \downarrow d_{C'} \\ C_i & \xrightarrow{f_i} & C'_i \end{array}$$

- ▶ C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i: C_i \rightarrow C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- ▶ C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes C_1, \dots, C_k tels que

$$C \leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \leftarrow \dots \rightarrow C_k \leftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.

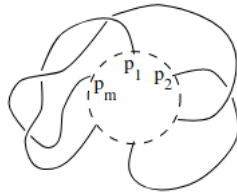
- ▶ C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\text{Com}(\mathcal{C})$) si il existe des morphismes $f: C \rightarrow C'$ et $g: C' \rightarrow C$ tels que $g \circ f \sim \text{id}_C$ et $f \circ g \sim \text{id}_{C'}$.
- ▶ On a les implications suivantes:

| |
|--|
| Isomorphes \Rightarrow Iso. dans $\text{Com}(\mathcal{C}) \Rightarrow$ Quasi-iso \Rightarrow Iso. dans $D(\mathcal{C}) \Rightarrow$ Même homologie |
|--|

- ▶ Khovanov a montré dans son article d'origine que les $H^i(L)$ sont des invariants de nœuds en construisant des quasi-isomorphismes entre les complexes $C(D)$ et $C(D')$, si $D \equiv_{R\text{-move}} D'$.
- ▶ Depuis, il a été démontré qu'en fait de tels complexes D et D' sont même équivalents à homotopie près, cf Bar Natan, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*.

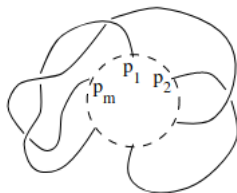
Surfaces et morphismes de cubes

- ▶ Soit U un disque fermé dans \mathbb{R}^2 , et T' un **enchevêtrement** (i.e. un plongement d'arcs et de cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$) avec m points sur $\partial U \times [0, 1]$, et T une projection générique de T' sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{U}$.
- ▶ L'intersection de T avec ∂U consiste en m points, notés p_1, \dots, p_m :

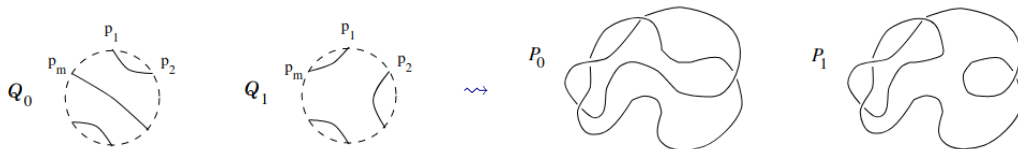


Surfaces et morphismes de cubes

- ▶ Soit U un disque fermé dans \mathbb{R}^2 , et T' un **enchevêtrement** (i.e. un plongement d'arcs et de cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$) avec m points sur $\partial U \times [0, 1]$, et T une projection générique de T' sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{U}$.
- ▶ L'intersection de T avec ∂U consiste en m points, notés p_1, \dots, p_m :

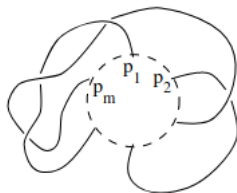


- ▶ Soient Q_0 et Q_1 deux systèmes de $m/2$ arcs dans U avec extrémités p_1, \dots, p_m . Alors $P_0 := Q_0 \cup T$ et $P_1 := Q_1 \cup T$ peuvent être considérés comme des diagrammes d'entrelacs dans \mathbb{R}^3 :

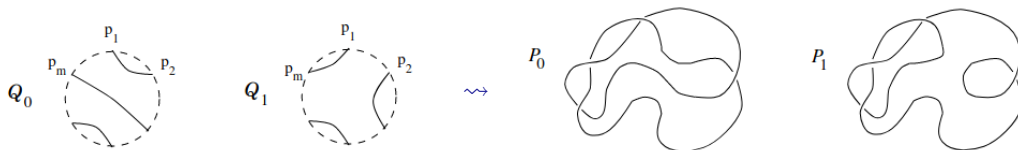


Surfaces et morphismes de cubes

- ▶ Soit U un disque fermé dans \mathbb{R}^2 , et T' un **enchevêtrement** (i.e. un plongement d'arcs et de cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$) avec m points sur $\partial U \times [0, 1]$, et T une projection générique de T' sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{U}$.
- ▶ L'intersection de T avec ∂U consiste en m points, notés p_1, \dots, p_m :



- ▶ Soient Q_0 et Q_1 deux systèmes de $m/2$ arcs dans U avec extrémités p_1, \dots, p_m . Alors $P_0 := Q_0 \cup T$ et $P_1 := Q_1 \cup T$ peuvent être considérés comme des diagrammes d'entrelacs dans \mathbb{R}^3 :



- ▶ On associe à P_0 et P_1 des I -cubes V_{P_0} et V_{P_1} . Soit S une surface compacte orientée de $U \times [0, 1]$ telle que $\partial S = Q_0 \times \{0\}, Q_1 \times \{1\}, \{p_1, \dots, p_m\} \times [0, 1]$.
- ▶ À S on associe un morphisme de I -cubes $\psi_S : V_{P_0} \rightarrow V_{P_1}$. Pour ceci, on construit pour tout $J \subset I$ un morphisme

$$\psi_{S,J} : V_{P_0}(J) \{-|J\} \rightarrow V_{P_1}(J) \{-|J\}$$

Surfaces et morphismes de cubes

- Soit $J \subset I$, on associe une résolution $T(J)$ des croisements de T . Ainsi, $T(J)$ est une collection de cercles et d'arcs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathring{U}$ avec extrémités p_1, \dots, p_m . Donc

$$V_{P_0}(J) = F(T(J) \cup Q_0)\{-|J|\}, \quad V_{P_1}(J) = F(T(J) \cup Q_1)\{-|J|\}$$

Surfaces et morphismes de cubes

- Soit $J \subset I$, on associe une résolution $T(J)$ des croisements de T . Ainsi, $T(J)$ est une collection de cercles et d'arcs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{U}$ avec extrémités p_1, \dots, p_m . Donc

$$V_{P_0}(J) = F(T(J) \cup Q_0) \{-|J|\}, \quad V_{P_1}(J) = F(T(J) \cup Q_1) \{-|J|\}$$

- Soit S' une surface de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ qui est $\begin{cases} S \text{ dans } U \times [0, 1] \\ T(J) \times [0, 1] \text{ en dehors de } U \times [0, 1] \end{cases}$. Alors l'application

$$F(S') : F(T(J) \cup Q_0) \rightarrow F(T(J) \cup Q_1)$$

est un morphisme de R -modules gradués, de degré $\chi(S') = \chi(S) - m/2$.

Surfaces et morphismes de cubes

- Soit $J \subset I$, on associe une résolution $T(J)$ des croisements de T . Ainsi, $T(J)$ est une collection de cercles et d'arcs dans $\mathbb{R}^2 \setminus \dot{U}$ avec extrémités p_1, \dots, p_m . Donc

$$V_{P_0}(J) = F(T(J) \cup Q_0)\{-|J|\}, \quad V_{P_1}(J) = F(T(J) \cup Q_1)\{-|J|\}$$

- Soit S' une surface de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ qui est $\begin{cases} S \text{ dans } U \times [0, 1] \\ T(J) \times [0, 1] \text{ en dehors de } U \times [0, 1] \end{cases}$. Alors l'application

$$F(S') : F(T(J) \cup Q_0) \rightarrow F(T(J) \cup Q_1)$$

est un morphisme de R -modules gradués, de degré $\chi(S') = \chi(S) - m/2$.

- Définissons $\psi_{S,J}$ par

$$\psi_{S,J} = F(S')\{-|J|\} : V_{P_0}(J)\{-|J|\} \rightarrow V_{P_1}(J)\{-|J|\}$$

- **Proposition** : L'application $\psi_S : V_{P_0} \rightarrow V_{P_1}$ est un morphisme de I -cubes, de degré $\chi(S) - m/2$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

► **Mouvement de Reidemeister 1 :**  \leftrightarrow

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

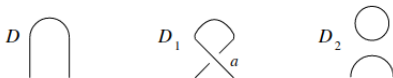
► **Mouvement de Reidemeister 1 :** 

- Soit D un diagramme d'un entrelacs L , avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

► **Mouvement de Reidemeister 1 :** 

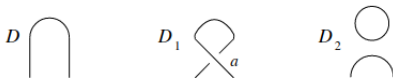
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L , avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a : la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D .



Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

► **Mouvement de Reidemeister 1 :** 

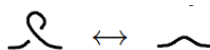
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L , avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a : la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D .



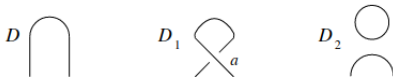
- **Objectif :** Définir un quasi-isomorphisme entre les complexes $C(D)$ et $C(D_1)$.
 - On va décomposer le I' -cube V_{D_1} comme $V_{D_1} = V' \oplus V''$.
 - Ceci induit une décomposition de $C(D_1)$ comme la somme directe d'un complexe acyclique et d'un complexe isomorphe à $C(D)$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

► **Mouvement de Reidemeister 1 :**



- Soit D un diagramme d'un entrelacs L , avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a : la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D .



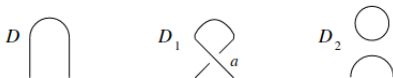
► **Objectif :** Définir un quasi-isomorphisme entre les complexes $C(D)$ et $C(D_1)$.

- On va décomposer le I' -cube V_{D_1} comme $V_{D_1} = V' \oplus V''$.
- Ceci induit une décomposition de $C(D_1)$ comme la somme directe d'un complexe acyclique et d'un complexe isomorphe à $C(D)$.
- Puisque $D_2 = D \sqcup \bigcirc$, on a $V_{D_2} = V_D \otimes A$, qui est le cube défini par les sommets $V_D(J) \otimes_R A$ et morphismes de structure $\xi_a^{V_D}(J) \otimes \text{id}_A$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

► **Mouvement de Reidemeister 1 :** 

- Soit D un diagramme d'un entrelacs L , avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a : la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D .



► **Objectif :** Définir un quasi-isomorphisme entre les complexes $C(D)$ et $C(D_1)$.

- On va décomposer le I' -cube V_{D_1} comme $V_{D_1} = V' \oplus V''$.
- Ceci induit une décomposition de $C(D_1)$ comme la somme directe d'un complexe acyclique et d'un complexe isomorphe à $C(D)$.
- Puisque $D_2 = D \sqcup \bigcirc$, on a $V_{D_2} = V_D \otimes A$, qui est le cube défini par les sommets $V_D(J) \otimes_R A$ et morphismes de structure $\xi_a^{V_D}(J) \otimes \text{id}_A$.
- Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage de a contenant la boucle:



et D , D_1 et D_2 coïncident en dehors de U .

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ On définit des morphismes de I -cubes

$$m_a : V_{D_2} \rightarrow V_D, \quad \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}, \quad \iota_a : V(D) \rightarrow V_{D_2}$$

- ▶ Le morphisme m_a est associé à la surface avec frontière $U \cap D_2 \times \{0\}$ et $U \cap D \times \{1\}$ caractérisée par



- ▶ Le morphisme Δ_a est associé à la surface avec frontière $U \cap D \times \{0\}$ et $U \cap D_2 \times \{1\}$ caractérisée par



- ▶ Le morphisme ι_a est associé à la surface avec frontière $U \cap D \times \{0\}$ et $U \cap D_2 \times \{1\}$ caractérisée par



- ▶ Les morphismes m_a, Δ_a, ι_a ainsi construits sont gradués de degrés respectifs $-1, -1, 1$ (ce sont les degrés des cobordismes associés à m, Δ, ι via F .)

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \rightarrow V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{1\}$$

sont des morphismes dans $R\text{-mod}_0$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \rightarrow V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{1\}$$

sont des morphismes dans $R\text{-mod}_0$.

- ▶ Par construction, $m_a \circ \iota_a = \text{id}_{V_D}$. Définissons $j_a := \Delta_a - \iota_a \circ m_a \circ \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}$, $\deg(j_a) = -1$.

- ▶ **Proposition** : Le I -cube V_{D_2} se décompose comme

$$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D).$$

- ▶ **Esquisse** : Si $D = \bigcirc$, $V_D = A$, $\iota_a(V_D) = \mathbf{1} \otimes A$, $j_a \mathbf{1} = X \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes X$, $j_a X = X \otimes X$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \rightarrow V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{1\}$$

sont des morphismes dans $R\text{-mod}_0$.

- ▶ Par construction, $m_a \circ \iota_a = \text{id}_{V_D}$. Définissons $j_a := \Delta_a - \iota_a \circ m_a \circ \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}$, $\text{deg}(j_a) = -1$.

- ▶ **Proposition** : Le I -cube V_{D_2} se décompose comme

$$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D).$$

- ▶ **Esquisse** : Si $D = \bigcirc$, $V_D = A$, $\iota_a(V_D) = \mathbf{1} \otimes A$, $j_a \mathbf{1} = X \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes X$, $j_a X = X \otimes X$

- ▶ Puisque D_1 est obtenu à partir de D , D_2 en ajoutant un croisement, le I' -cube V_{D_1} contient V_D et V_{D_2} comme des sous-cubes de codimension 1. Il y a des isomorphismes canoniques

$$V_{D_1}(\star 0) \simeq V_{D_2}, \quad V_{D_1}(\star 1) \simeq V_D\{-1\}$$

($V_{D_1}(\star 0)$ est le $I' - \{a\} = I$ -cube avec $V_{D_1}(\star 0)(J) = V(D_1)(J)$ pour $J \subset I$.)

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \rightarrow V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \rightarrow V_{D_2}\{1\}$$

sont des morphismes dans $R\text{-mod}_0$.

- ▶ Par construction, $m_a \circ \iota_a = \text{id}_{V_D}$. Définissons $j_a := \Delta_a - \iota_a \circ m_a \circ \Delta_a : V_D \rightarrow V_{D_2}$, $\text{deg}(j_a) = -1$.

- ▶ **Proposition** : Le I -cube V_{D_2} se décompose comme

$$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D).$$

- ▶ **Esquisse** : Si $D = \bigcirc$, $V_D = A$, $\iota_a(V_D) = \mathbf{1} \otimes A$, $j_a \mathbf{1} = X \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes X$, $j_a X = X \otimes X$

- ▶ Puisque D_1 est obtenu à partir de D , D_2 en ajoutant un croisement, le I' -cube V_{D_1} contient V_D et V_{D_2} comme des sous-cubes de codimension 1. Il y a des isomorphismes canoniques

$$V_{D_1}(\star 0) \simeq V_{D_2}, \quad V_{D_1}(\star 1) \simeq V_D\{-1\}$$

($V_{D_1}(\star 0)$ est le $I' - \{a\} = I$ -cube avec $V_{D_1}(\star 0)(J) = V(D_1)(J)$ pour $J \subset I$.)

- ▶ Sous ces isomorphismes, le morphisme de structure $\xi_a^{V_{D_1}}$ satisfait

$$\left(\xi_a^{V_{D_1}} : V_{D_1}(\star 0) \rightarrow V_{D_1}(\star 1) \right) = (m_a : V_{D_2} \rightarrow V_D\{-1\}), \quad \text{i.e.}$$

$$\begin{array}{ccc} V_{D_1}(\star 0) & \xrightarrow{\xi_a^{V_{D_2}}} & V_{D_1}(\star 1) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ V_{D_2} & \xrightarrow{m_a} & V_D\{-1\} \end{array}$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

- ▶ $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
- ▶ $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

- ▶ $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
- ▶ $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.
- ▶ On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

- ▶ $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
- ▶ $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.
- ▶ On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

- ▶ **Proposition :** Le complexe $\overline{C}(V'' \otimes E_{I'})$ est acyclique.
 - ▶ Il est isomorphe à $\text{Cone}(\text{id} : \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1] \rightarrow \overline{C}(V_D \otimes E_I))$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

- ▶ $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
- ▶ $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.
- ▶ On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

- ▶ **Proposition :** Le complexe $\overline{C}(V'' \otimes E_{I'})$ est acyclique.

- ▶ Il est isomorphe à $\text{Cone}(\text{id} : \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1] \rightarrow \overline{C}(V_D \otimes E_I))$.

- ▶ **Proposition :** Les complexes $\overline{C}(V' \otimes E_{I'})$ et $\overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\}$ sont isomorphes. En conséquence, $\overline{C}(D_1)$ et $\overline{C}(D)\{1\}$ sont quasi-isomorphes.

$$\begin{aligned} \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) &= \overline{C}(V'(\star 0) \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V_D\{1\} \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{C}(D_1) &= \overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\} \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(D)\{1\} \oplus (\text{Acyclic complex}) \end{aligned}$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- ▶ Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

- ▶ $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
- ▶ $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.
- ▶ On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

- ▶ **Proposition :** Le complexe $\overline{C}(V'' \otimes E_{I'})$ est acyclique.

- ▶ Il est isomorphe à $\text{Cone}(\text{id} : \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1] \rightarrow \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1])$.

- ▶ **Proposition :** Les complexes $\overline{C}(V' \otimes E_{I'})$ et $\overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\}$ sont isomorphes. En conséquence, $\overline{C}(D_1)$ et $\overline{C}(D)\{1\}$ sont quasi-isomorphes.

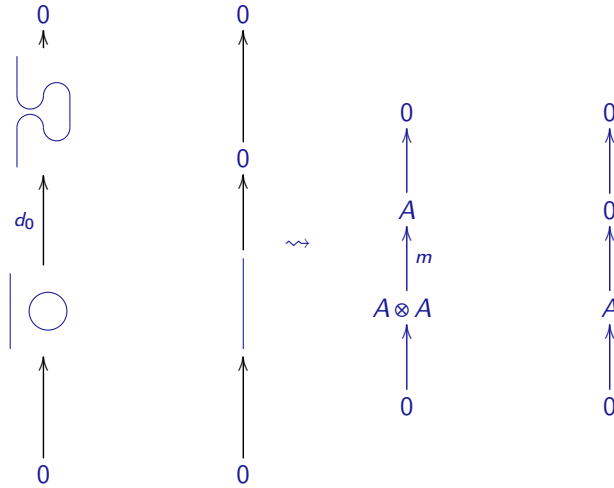
$$\begin{aligned} \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) &= \overline{C}(V'(\star 0) \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V_D\{1\} \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \overline{C}(D_1) &= \overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\} \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}) \\ &= \overline{C}(D)\{1\} \oplus (\text{Acyclic complex}) \end{aligned}$$

- ▶ $x(D_1) = x(D)$, $y(D_1) = y(D) + 1$, et

$$\begin{aligned} C(D) &= \overline{D}[x(D)]\{2x(D) - y(D)\}, & C(D_1) &= \overline{C}(D_1)[x(D_1)]\{2x(D_1) - y(D_1)\} \\ & & &= \overline{C}(D_1)[x(D)]\{2x(D) - y(D) - 1\} \end{aligned}$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

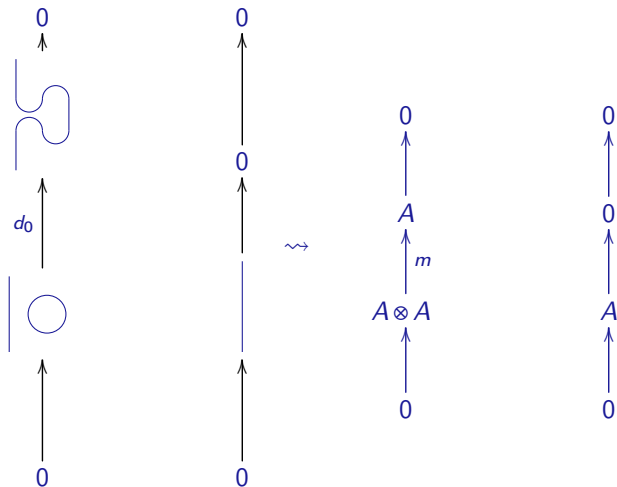
► Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



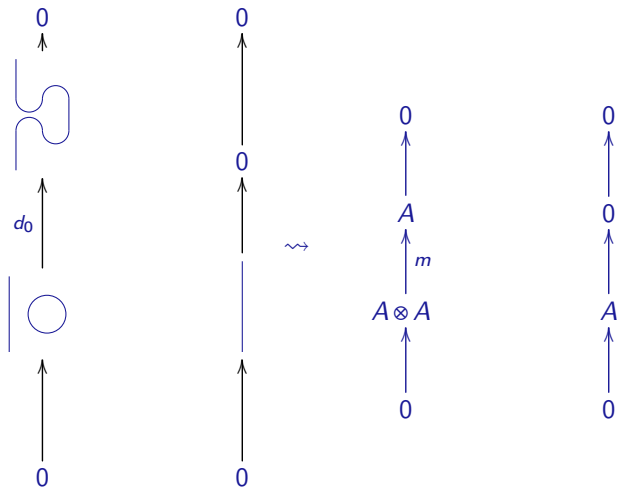
avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

- $\text{Ker}(d_0) = \langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$, $\text{Im}(d_0) = A$, donc

$$H^0(C_1) = R\langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle, \quad H^1(C_1) = 0.$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

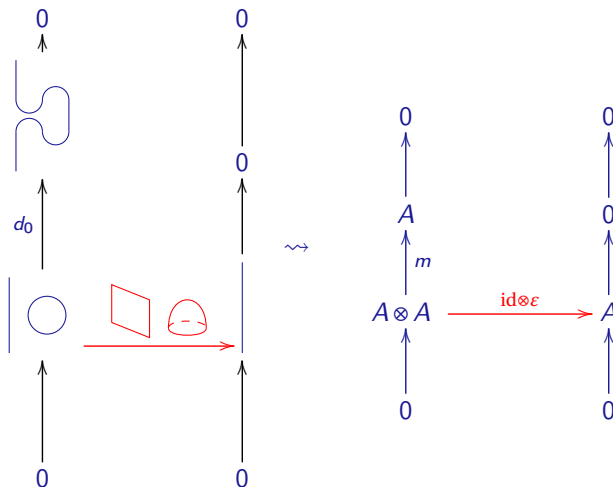
- $\text{Ker}(d_0) = \langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$, $\text{Im}(d_0) = A$, donc

$$H^0(C_1) = R\langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle, \quad H^1(C_1) = 0.$$

- On a également $H^0(C_2) = A = R\langle 1, X \rangle$, $H^1(C_2) = 0$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- ▶ Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

- ▶ $\text{Ker}(d_0) = \langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$, $\text{Im}(d_0) = A$, donc

$$H^0(C_1) = R\langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle, \quad H^1(C_1) = 0.$$

- ▶ On a également $H^0(C_2) = A = R\langle 1, X \rangle$, $H^1(C_2) = 0$.

- ▶ On a $X \times X \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} X$, $1 \otimes X - X \otimes 1 \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} 1$, donc l'application $\text{id} \otimes \varepsilon$ définit bien un quasi-isomorphisme de complexes (si on prend $c = 0$).

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- ▶ Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R -move.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- ▶ Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R -move.
- ▶ Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a , et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$$\overline{c}(R) = \left(\overline{c}(R) \xrightarrow{m} \overline{c}(R)_{\{-1\}} \right)$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- ▶ Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R -move.
- ▶ Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a , et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$$\overline{c}(R) = \left(\overline{c}(O) \xrightarrow{m} \overline{c}(R)_{\{-1\}} \right)$$

- ▶ On définit un sous-complexe du complexe à droite par

$$c' = \left(\overline{c}(O)_1 \xrightarrow{m} \overline{c}(R)_{\{-1\}} \right)$$

où $\overline{c}(O)_1$ indique que pour le cercle présent dans O , on ne garde que la partie de A sur 1 , et on oublie la partie sur X .

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- ▶ Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R -move.
- ▶ Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a , et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$$\overline{c}(R) = \left(\overline{c}(D_1) \xrightarrow{m} \overline{c}(D) \right)_{\{-1\}}$$

- ▶ On définit un sous-complexe du complexe à droite par

$$C' = \left(\overline{c}(D_1)_{\mathbf{1}} \xrightarrow{m} \overline{c}(D)_{\{-1\}} \right)$$

où $\overline{c}(D_1)_{\mathbf{1}}$ indique que pour le cercle présent dans D_1 , on ne garde que la partie de A sur $\mathbf{1}$, et on oublie la partie sur X .

- ▶ Puisque $\mathbf{1}$ est une unité pour A , la différentielle de C' est donc l'identité et C' est donc acyclique. Regardons le quotient:

$$C/C' = \left(\overline{c}(D)_{\mathbf{1}=0} \rightarrow 0 \right)$$

où l'indice $\mathbf{1}=0$ indique que l'on quotiente le R -module A associé au cercle par $\langle \mathbf{1}=0 \rangle$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- ▶ Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R -move.
- ▶ Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a , et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$$\overline{C}(R) = \left(\overline{C}(O) \xrightarrow{m} \overline{C}(R) \right)_{\{-1\}}$$

- ▶ On définit un sous-complexe du complexe à droite par

$$C' = \left(\overline{C}(O)_1 \xrightarrow{m} \overline{C}(R)_{\{-1\}} \right)$$

où $\overline{C}(O)_1$ indique que pour le cercle présent dans O , on ne garde que la partie de A sur 1 , et on oublie la partie sur X .

- ▶ Puisque 1 est une unité pour 1 , la différentielle de C' est donc l'identité et C' est donc acyclique. Regardons le quotient:

$$C/C' = \left(\overline{C}(O)_{1=0} \rightarrow 0 \right)$$

où l'indice $1=0$ indique que l'on quotiente le R -module A associé au cercle par $\langle 1=0 \rangle$.

- ▶ Mais $A/\langle 1=0 \rangle$ est de rang 1, engendré par X , et est donc à décalage près isomorphe à $\overline{C}(X)$.
- ▶ Ce décalage est annulé par les décalages $[y(L)]\{2x(L) - y(L)\}$ qui apparaissent lorsqu'on passe de \overline{C} à C .

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :**  \leftrightarrow 

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :** 

► On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{C}(\text{OOC})_{\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \overline{C}(\text{XOC})_{\{-2\}} \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \overline{C}(\text{OX}) & \longrightarrow & \overline{C}(\text{XX})_{\{-1\}}
 \end{array}$$

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :** 

► On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{C}(\text{COC})_{\{-1\}} \xrightarrow{m} \overline{C}(\text{COC})_{\{-2\}} & & \overline{C}(\text{COC})_{\mathbf{1}\{-1\}} \xrightarrow{m} \overline{C}(\text{COC})_{\{-2\}} \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \overline{C}(\text{COC}) & \longrightarrow & \overline{C}(\text{COC})_{\{-1\}} & \xrightarrow{\quad} & \overline{C}(\text{COC})_{\{-1\}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :** 

► On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{C}(\text{DOC})_{\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \overline{C}(\text{COC})_{\{-2\}} \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \overline{C}(\text{CO}) & \longrightarrow & \overline{C}(\text{OC})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad \simeq \quad
 \begin{array}{ccc}
 \overline{C}(\text{DOC})_{\mathbf{1}\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \overline{C}(\text{COC})_{\{-2\}} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

► Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{C}(\text{DOC})_{\mathbf{1=0}\{-1\}} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \overline{C}(\text{CO}) & \longrightarrow & \overline{C}(\text{OC})_{\{-1\}}
 \end{array}$$

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :** 

► On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{DOC})_{\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \bar{C}(\text{COC})_{\{-2\}} \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{CO}) & \longrightarrow & \bar{C}(\text{OC})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad \simeq \quad
 \begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{DOC})_{\mathbf{1}\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \bar{C}(\text{COC})_{\{-2\}} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

► Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{DOC})_{\mathbf{1=0}\{-1\}} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{CO}) & \longrightarrow & \bar{C}(\text{OC})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad \simeq \quad
 \begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \bar{C}(\text{OC})_{\{-1\}}
 \end{array}$$

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :** 

► On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{crossing})_{\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \bar{C}(\text{no crossing})_{\{-2\}} \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{no crossing}) & \longrightarrow & \bar{C}(\text{crossing})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad \simeq \quad
 \begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{crossing})_{\mathbf{1}\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \bar{C}(\text{no crossing})_{\{-2\}} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

► Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{crossing})_{\mathbf{1=0}\{-1\}} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{no crossing}) & \longrightarrow & \bar{C}(\text{crossing})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad \simeq \quad
 \begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \bar{C}(\text{crossing})_{\{-1\}}
 \end{array}$$

► Ceci donne un complexe C'' , qui est celui associé au diagramme de droite de $R2$. Si on regarde le quotient $(C/C')/C''$, on a alors

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{crossing})_{\mathbf{1=0}\{-1\}} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{no crossing}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

qui est acyclique.

Invariance par Reidemeister 2

► **Mouvement de Reidemeister 2 :** 

► On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{CROIS})_{\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \bar{C}(\text{CROIS})_{\{-2\}} \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{CROIS}) & \longrightarrow & \bar{C}(\text{CROIS})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{CROIS})_{\{1\}\{-1\}} & \xrightarrow{m} & \bar{C}(\text{CROIS})_{\{-2\}} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

► Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{CROIS})_{\{1=0\}\{-1\}} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{CROIS}) & \longrightarrow & \bar{C}(\text{CROIS})_{\{-1\}}
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \bar{C}(\text{CROIS})_{\{-1\}}
 \end{array}$$

► Ceci donne un complexe C'' , qui est celui associé au diagramme de droite de $R2$. Si on regarde le quotient $(C/C')/C''$, on alors

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{C}(\text{CROIS})_{\{1=0\}\{-1\}} & \longrightarrow & 0 \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow \\
 \bar{C}(\text{CROIS}) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

qui est acyclique.

► **Conclusion :** $H^*(C'') = H^*(C/C') = H(C)$ puisque C' et $(C/C')/C''$ sont acycliques.

Autres références

- ▶ *A functor-valued invariant of tangles*, Mikhail Khovanov, 2002, arXiv:math/0103190, *Algebr. Geom. Topol.* 2(1), 665-741.
- ▶ *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*, Dror Bar-Natan, 2005, arXiv:math/0410495, *Geometry & Topology Vol. 9*, 1443-1499.
- ▶ *Matrix factorizations and link homology*, Mikhail Khovanov & Lev Rozansky, 2008, arXiv:math/0401268, *Fundamenta Mathematicae* 199, 1-91.
- ▶ *A 2-category of chronological cobordisms and odd Khovanov homology*, Krzysztof Putyra, 2014, arXiv:1310.1895, *Banach Center Publ.* 103:291-355
- ▶ Autres références dans *Five lectures on Khovanov homology*, Paul Turner, arXiv:math/0606464.

A Quick Reference Guide to Khovanov's Categorification of the Jones Polynomial
Dror Bar-Natan, 9 May 2002

The Kauffman Bracket: $\langle \emptyset \rangle = 1$; $\langle \bigcirc \rangle = (q + q^{-1})\langle L \rangle$; $\langle \times \rangle = \left(\sum_{\substack{\text{no-smoothing} \\ \text{smoothing}}} \right) - q \left(\sum_{\substack{\text{no-smoothing} \\ \text{smoothing}}} \right) \langle L \rangle$.

The Jones Polynomial: $J(L) = (-1)^{n_+ - n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle L \rangle$, where (n_+, n_-) count (\times, \times) crossings.

Khovanov's construction: $[L]$ — a chain complex of graded \mathbb{Z} -modules;

$$[\emptyset] = 0 \rightarrow \sum_{\text{height } 0} \mathbb{Z} \rightarrow 0; \quad [\bigcirc] = V \oplus [L]; \quad [\times] = \text{Flatten} \left(0 \rightarrow \sum_{\text{height } 0} [\times] \rightarrow \sum_{\text{height } 1} \mathbb{Z}\{1\} \rightarrow 0 \right);$$

$$\mathcal{H}(L) = \mathcal{H}(C(L) = [L][[-n_-][n_+ - 2n_-])$$

$$V = \text{span}(v_+, v_-); \quad \deg v_{\pm} = \pm 1; \quad \text{qdim } V = q + q^{-1} \quad \text{with} \quad \text{qdim } \mathcal{O} := \sum_m q^m \dim \mathcal{O}_m;$$

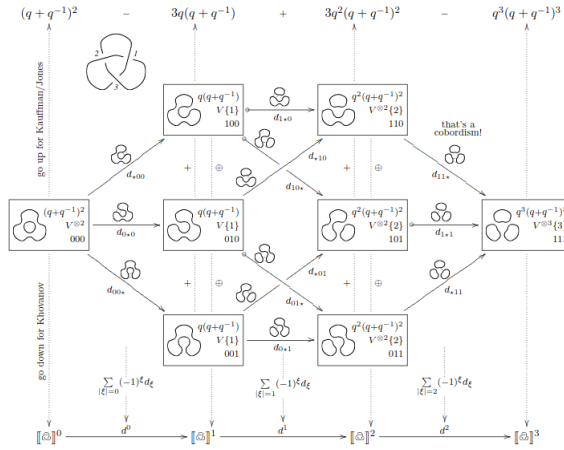
$$\mathcal{O}\{s\}_m := \mathcal{O}_{m-s} \quad \text{so} \quad \text{qdim } \mathcal{O}\{s\} = q^s \text{qdim } \mathcal{O}; \quad [s]: \quad \text{height shift by } s;$$

$$\begin{aligned} \left(\bigcirc \bigcirc \begin{array}{c} \text{smoothing} \\ \text{smoothing} \end{array} \right) &\rightarrow (V \otimes V \overset{m}{\otimes} V) & m: \begin{cases} v_+ \otimes v_- \mapsto v_- & v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+ \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_- & v_- \otimes v_- \mapsto 0 \end{cases} \\ \left(\begin{array}{c} \text{smoothing} \\ \text{smoothing} \end{array} \bigcirc \bigcirc \right) &\rightarrow (V \overset{\Delta}{\Delta} V \otimes V) & \Delta: \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{cases} \end{aligned}$$

That's a Potemkin Algebra! And a $(1+1)$ -dimensional $\mathbb{Z}[q]$ -module!

Example:

$$\int q^{-2} + 1 + q^2 - q^6 \quad \xrightarrow{\substack{(-1)^{n_+ - n_-} q^{n_+ - 2n_-} \\ \text{(with } (n_+, n_-) = (3, 0))}} \quad q + q^3 + q^5 - q^7.$$



$$\left(\text{here } (-1)^{\xi} := (-1)^{\sum i < j \xi_j} \text{ if } \xi_j = * \right) = [\emptyset] \xrightarrow{\substack{[-n_-][n_+ - 2n_-] \\ \text{(with } (n_+, n_-) = (3, 0))}} C(\emptyset).$$

- Theorem 1.** The graded Euler characteristic of $C(L)$ is $J(L)$.
- Theorem 2.** The homology $\mathcal{H}(L)$ is a link invariant and thus so is $Kh_{\mathbb{Z}}(L) := \sum_e t^e \text{qdim } \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^e(C(L))$ over any field \mathbb{F} .
- Theorem 3.** $\mathcal{H}(C(L))$ is strictly stronger than $\hat{J}(L)$: $\mathcal{H}(C(\bar{5}_1)) \neq \mathcal{H}(C(10_{132}))$ whereas $\hat{J}(\bar{5}_1) = \hat{J}(10_{132})$.
- Conjecture 1.** $Kh_{\mathbb{Q}}(L) = q^{s-1}(1 + q^2 + (1 + tq^4)Kh)$ and $Kh_{\mathbb{Z}_2}(L) = q^{s-1}(1 + q^2)(1 + (1 + tq^2)Kh)$ for even $s = s(L)$ and non-negative-coefficients laurent polynomial $Kh = Kh(L)$.