Une catégorification du polynôme de Jones

Benjamin Dupont

Groupe de travail sur les groupes de tresses

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

27 Mai 2021

Références

- *A categorification of the Jones polynomial*, Mikhail Khovanov, 2000, arXiv:math/9908171, *Duke Math. J. 101, no. 3, 359–426*.

- *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, Drod Bar Natan, 2002, arXiv:math/0201043, *Algebr. Geom. Topol. 2(1): 337-370*.

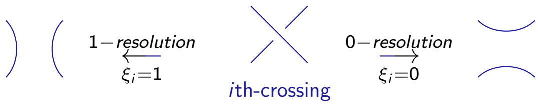
Point de départ: Kauffman state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:

  - $\langle U \rangle = 1$,
  - $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1})\langle L \rangle$,
  - $\langle$  $\rangle = \langle$  $\rangle - q\langle \,)\,(\, \rangle$
  - Invariance par isotopie.

Point de départ: Kauffman state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:
  - $\langle U \rangle = 1$,
  - $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1}) \langle L \rangle$,
  - 
  - Invariance par isotopie.
- Si L admet k croisements, on va considérer des **résolutions** L_ξ de L pour $\xi \in \{0,1\}^k$:

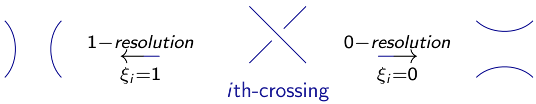


Point de départ: Kauffman state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:

  - $\langle U \rangle = 1$,
  - $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1})\langle L \rangle$,
  - 
  - Invariance par isotopie.

- Si L admet k croisements, on va considérer des **résolutions** L_ξ de L pour $\xi \in \{0,1\}^k$:



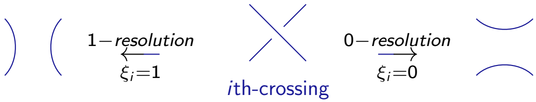
- **Kauffman state-sum formula:**

$$\langle L \rangle = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

  où $|L_\xi|$ est le nombre de boucles disjointes qui composent le diagramme L_ξ.

Point de départ: Kauffman state sum formula

- **Rappel:** Soit q un paramètre. Le crochet de Kauffman d'un entrelacs L est défini par les quatre axiômes suivant:
  - $\langle U \rangle = 1$,
  - $\langle U \sqcup L \rangle = (q + q^{-1})\langle L \rangle$,
  - 
  - Invariance par isotopie.
- Si L admet k croisements, on va considérer des **résolutions** L_ξ de L pour $\xi \in \{0,1\}^k$:



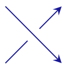
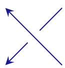
- **Kauffman state-sum formula:**

$$\langle L \rangle = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|} \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

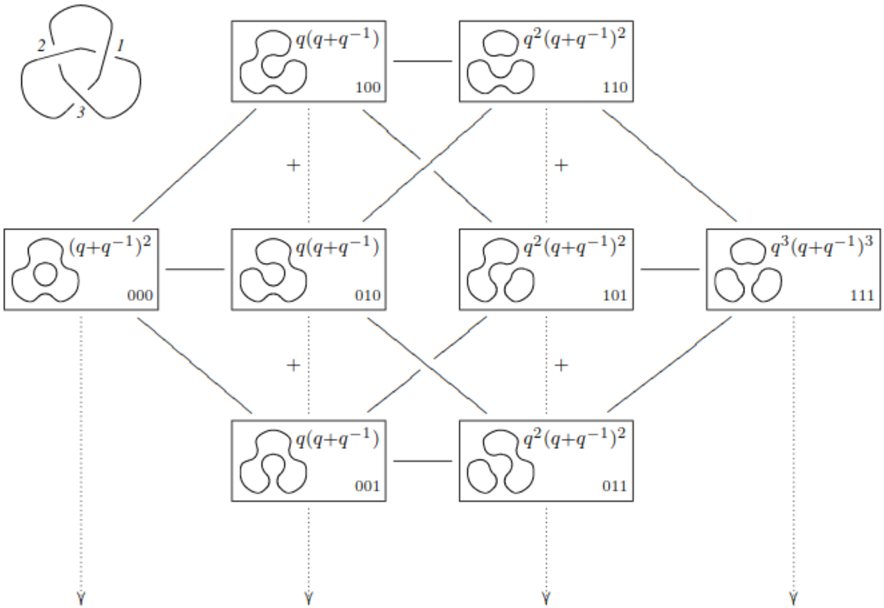
  où $|L_\xi|$ est le nombre de boucles disjointes qui composent le diagramme L_ξ.

- Le **polynôme de Jones** est défini comme une renormalisation de ce crochet:

$$J(L) = (-1)^{x(L)} \frac{q^{y(L) - 2x(L)}}{q + q^{-1}} \langle L \rangle$$

  - $x(L)$ est le nombre de croisements **négatifs** de L, *i.e.* 
  - $y(L)$ est le nombre de croisements **positifs** de L, *i.e.* 

Un exemple



$$(q+q^{-1})^2 \quad - \quad 3q(q+q^{-1}) \quad + \quad 3q^2(q+q^{-1})^2 \quad - \quad q^3(q+q^{-1})^3 \tag{1}$$

$$= q^{-2}+1+q^2-q^6 \xrightarrow[\text{(with } (n_+,n_-)=(3,0))]{\cdot(-1)^{n_-}q^{n_+-2n_-}} q+q^3+q^5-q^9 \xrightarrow{\cdot(q+q^{-1})^{-1}} J(\ ) = q^2+q^6-q^8.$$

Idée générale

- Reprenons la **Kauffman state sum formula**:

$$V(L) = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|}$$

Idée générale

- Reprenons la **Kauffman state sum formula**:

$$V(L) = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|}$$

- Ceci va être interprété comme la **caractéristique d'Euler graduée** d'un complexe formé à partir du cube des résolutions.

Idée générale

- Reprenons la **Kauffman state sum formula**:

$$V(L) = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|}$$

- Ceci va être interprété comme la **caractéristique d'Euler graduée** d'un complexe formé à partir du cube des résolutions.

- Le terme $(q + q^{-1})$ va être interprété comme la dimension graduée d'un R-module A engendré par un élément de degré 1 et un élément de degré -1:

$$\mathrm{gdim}(V) = \sum_{k} q^k \mathrm{dim}(V_k)$$

- Le terme $(-1)^{\xi}$ correspond à un décalage de graduation $\{\xi\}$.

Idée générale

- Reprenons la **Kauffman state sum formula**:

$$V(L) = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|}$$

- Ceci va être interprété comme la **caractéristique d'Euler graduée** d'un complexe formé à partir du cube des résolutions.
- Le terme $(q + q^{-1})$ va être interprété comme la dimension graduée d'un R-module A engendré par un élément de degré 1 et un élément de degré -1:

$$\mathrm{gdim}(V) = \sum_{k} q^k \mathrm{dim}(V_k)$$

- Le terme $(-1)^{\xi}$ correspond à un décalage de graduation $\{\xi\}$.
- Si L_ξ est une résolution de L à k-cycles, on va lui **'associer'** un module $V_\xi(L) := A^{\otimes k}\{-|\xi|\}$.
- Ceci va nous donner un **cube** dans la catégorie $R - \mathrm{mod}_0$ des R-modules gradués, à partir du quelle nous allons déduire un complexe, dont les groupes de **cohomologie** donneront un invariant.

Idée générale

- Reprenons la **Kauffman state sum formula**:

$$V(L) = \sum_{\xi} (-1)^{|\xi|} q^{|\xi|} (q + q^{-1})^{|L_\xi|}$$

- Ceci va être interprété comme la **caractéristique d'Euler graduée** d'un complexe formé à partir du cube des résolutions.
- Le terme $(q + q^{-1})$ va être interprété comme la dimension graduée d'un R-module A engendré par un élément de degré 1 et un élément de degré -1:

$$\mathrm{gdim}(V) = \sum_k q^k \mathrm{dim}(V_k)$$

- Le terme $(-1)^{\xi}$ correspond à un décalage de graduation $\{\xi\}$.
- Si L_ξ est une résolution de L à k-cycles, on va lui **'associer'** un module $V_\xi(L) := A^{\otimes k}\{-|\xi|\}$.
- Ceci va nous donner un **cube** dans la catégorie $R - \mathrm{mod}_0$ des R-modules gradués, à partir du quelle nous allons déduire un complexe, dont les groupes de **cohomologie** donneront un invariant.
- Les morphismes de ces cubes vont être définis à partir de morphismes $L_\xi \to L_{\xi'}$, qui sont des morphismes entre deux 1-variétés contenant des cycles, à partir de **cobordismes**.

Plan de l'exposé

I. Complexes, cubes et cobordismes

II. Homologie de Khovanov

III. Invariance par mouvements de Reidemeister

I. Complexes, cubes et cobordismes

Notations et définitions

- Soit $R = \mathbb{Z}[c]$, $\mathbb{Z}$-gradué par $\deg(1) = 0$, $\deg(c) = 2$.

Notations et définitions

- Soit $R = \mathbb{Z}[c]$, $\mathbb{Z}$-gradué par $\deg(1) = 0$, $\deg(c) = 2$.
- $R - \mathrm{mod}_0 :=$ catégorie des R-modules gradué et applications préservant le degré:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications vérifiant $N_i \to M_i$.

Notations et définitions

- Soit $R = \mathbb{Z}[c]$, $\mathbb{Z}$-gradué par $\deg(1) = 0$, $\deg(c) = 2$.
- $R - \mathrm{mod}_0 :=$ catégorie des R-modules gradué et applications préservant le degré:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications vérifiant $N_i \to M_i$.
- $R - \mathrm{mod} :=$ catégorie des R-modules gradués et applications **graduées**:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications graduées ($\alpha : M \to N$ est graduée de degré k si $\alpha(M_i) \subset N_{i+k}$ pour tout i).

Notations et définitions

- Soit $R = \mathbb{Z}[c]$, $\mathbb{Z}$-gradué par $\deg(1) = 0$, $\deg(c) = 2$.
- $R - \mathrm{mod}_0 :=$ catégorie des R-modules gradué et applications préservant le degré:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications vérifiant $N_i \to M_i$.
- $R - \mathrm{mod} :=$ catégorie des R-modules gradués et applications **graduées**:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications graduées ($\alpha : M \to N$ est graduée de degré k si $\alpha(M_i) \subset N_{i+k}$ pour tout i).
- Pour un R-module gradué $N = \oplus N_i$, $N\{n\}$ est défini comme le R-module gradué tel que

$$N\{n\}_i = N_{n+i}.$$

Notations et définitions

- Soit $R = \mathbb{Z}[c]$, $\mathbb{Z}$-gradué par $\deg(1) = 0$, $\deg(c) = 2$.
- $R - \mathrm{mod}_0 :=$ catégorie des R-modules gradué et applications préservant le degré:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications vérifiant $N_i \to M_i$.
- $R - \mathrm{mod} :=$ catégorie des R-modules gradués et applications **graduées**:
  - Objets: $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$,
  - Morphismes de M dans N: applications graduées ($\alpha : M \to N$ est graduée de degré k si $\alpha(M_i) \subset N_{i+k}$ pour tout i).
- Pour un R-module gradué $N = \oplus N_i$, $N\{n\}$ est défini comme le R-module gradué tel que

$$N\{n\}_i = N_{n+i}.$$

- **Caractéristique d'Euler graduée :** Si $M = \bigoplus M_i$, alors

$$\widehat{\chi}(M) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \dim_{\mathbb{Q}}(M_i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) q^j.$$

Notations et définitions

- $\mathrm{Com}(\mathcal{B}) :=$ catégorie des complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$:
  - Objets: $N \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est donné par une collection d'objects N^i de $\mathcal{B}$, $i \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d^i : N^i \to N^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$.
  - Morphismes de M vers N: collection de morphismes $f^i : M^i \to N^i$ tels que $f^{i+1}d^i = d^i f^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Notations et définitions

- $\mathrm{Com}(\mathcal{B}) :=$ catégorie des complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$:
  - Objets: $N \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est donné par une collection d'objects N^i de $\mathcal{B}$, $i \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d^i : N^i \to N^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$.
  - Morphismes de M vers N: collection de morphismes $f^i : M^i \to N^i$ tels que $f^{i+1}d^i = d^i f^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Un morphisme $f : M \to N$ de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est un **quasi-isomorphisme** si $f^* : H^i(M) \to H^i(N)$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Notations et définitions

- $\mathrm{Com}(\mathcal{B}) :=$ catégorie des complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$:
  - Objets: $N \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est donné par une collection d'objects N^i de $\mathcal{B}$, $i \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d^i : N^i \to N^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$.
  - Morphismes de M vers N: collection de morphismes $f^i : M^i \to N^i$ tels que $f^{i+1}d^i = d^i f^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Un morphisme $f : M \to N$ de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est un **quasi-isomorphisme** si $f^* : H^i(M) \to H^i(N)$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a un automorphisme de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ défini par
  - $N[n]^i = N^{i+n}$,
  - $d[n]^i = (-1)^n d^{i+n}$, et étendu aux morphismes de manière naturelle.

Notations et définitions

- $\mathrm{Com}(\mathcal{B}) :=$ catégorie des complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$:
  - Objets: $N \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est donné par une collection d'objects N^i de $\mathcal{B}$, $i \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d^i : N^i \to N^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$.
  - Morphismes de M vers N: collection de morphismes $f^i : M^i \to N^i$ tels que $f^{i+1}d^i = d^i f^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Un morphisme $f : M \to N$ de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est un **quasi-isomorphisme** si $f^* : H^i(M) \to H^i(N)$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a un automorphisme de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ défini par
  - $N[n]^i = N^{i+n}$,
  - $d[n]^i = (-1)^n d^{i+n}$, et étendu aux morphismes de manière naturelle.
- Le cône d'un morphisme $f : M \to N$ de complexes est un complexe $C(f)$ défini par
  - $C(f)^i = M[1]^i \oplus N_i$,
  - $d_{C(f)}(m^{i+1}, n^i) = (-d_M m^{i+1}, f(m^{i+1}) + d_N n^i)$.
- **Exemple :** Si
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "b_1"'] & B_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
, alors

$$Cone(f) = \ 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{(-a_1, f_1)} A_2 \oplus B_1 \xrightarrow{(f_2, b_1)} B_2 \longrightarrow 0$$

Notations et définitions

- $\mathrm{Com}(\mathcal{B}) :=$ catégorie des complexes d'une catégorie abélienne $\mathcal{B}$:
  - Objets: $N \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est donné par une collection d'objects N^i de $\mathcal{B}$, $i \in \mathbb{Z}$ et de morphismes $d^i : N^i \to N^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$.
  - Morphismes de M vers N: collection de morphismes $f^i : M^i \to N^i$ tels que $f^{i+1}d^i = d^i f^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Un morphisme $f : M \to N$ de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ est un **quasi-isomorphisme** si $f^* : H^i(M) \to H^i(N)$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a un automorphisme de $\mathrm{Com}(\mathcal{B})$ défini par
  - $N[n]^i = N^{i+n}$,
  - $d[n]^i = (-1)^n d^{i+n}$, et étendu aux morphismes de manière naturelle.
- Le cône d'un morphisme $f : M \to N$ de complexes est un complexe $C(f)$ défini par
  - $C(f)^i = M[1]^i \oplus N_i$,
  - $d_{C(f)}(m^{i+1}, n^i) = (-d_M m^{i+1}, f(m^{i+1}) + d_N n^i)$.
- **Exemple :** Si
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "b_1"'] & B_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
, alors

$$Cone(f) = \ 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{(-a_1, f_1)} A_2 \oplus B_1 \xrightarrow{(f_2, b_1)} B_2 \longrightarrow 0$$

- L'automorphisme $\{n\}$ s'étend en un automorphisme sur la catégorie $\mathrm{Com}(R - \mathrm{mod}_0)$.

Algèbre de Frobenius

- Soit A le R-module gradué libre de rang 2 engendré par $\mathbf{1}$ et X, avec

$$\deg(\mathbf{1}) = 1, \qquad \deg(X) = -1.$$

muni d'une structure d'algèbre commutative avec unité $\mathbf{1}$ et multiplication définie par $\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X, X^2 = 0$.

Algèbre de Frobenius

- Soit A le R-module gradué libre de rang 2 engendré par $\mathbf{1}$ et X, avec

$$\deg(\mathbf{1}) = 1, \qquad \deg(X) = -1.$$

  muni d'une structure d'algèbre commutative avec unité $\mathbf{1}$ et multiplication définie par $\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X, X^2 = 0$.

- Soit $\iota : R \to A$, $1 \mapsto \mathbf{1}$ l'application unité. Elle augmente le degré de 1 car $\deg_R(1) = 0$, $\deg_A(\mathbf{1}) = 1$.

- On munit A d'une structure de cogèbre avec comultiplication co(associative, commutative):

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes X + X \otimes \mathbf{1} + cX \otimes X, \quad \Delta(X) = X \otimes X$$

  et counité $\varepsilon(\mathbf{1}) = -c, \varepsilon(X) = 1$.

Algèbre de Frobenius

- Soit A le R-module gradué libre de rang 2 engendré par $\mathbf{1}$ et X, avec

$$\deg(\mathbf{1}) = 1, \qquad \deg(X) = -1.$$

 muni d'une structure d'algèbre commutative avec unité $\mathbf{1}$ et multiplication définie par $\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X, X^2 = 0$.

- Soit $\iota : R \to A$, $1 \mapsto \mathbf{1}$ l'application unité. Elle augmente le degré de 1 car $\deg_R(1) = 0$, $\deg_A(\mathbf{1}) = 1$.

- On munit A d'une structure de cogèbre avec comultiplication co(associative, commutative):

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes X + X \otimes \mathbf{1} + cX \otimes X, \quad \Delta(X) = X \otimes X$$

 et counité $\varepsilon(\mathbf{1}) = -c, \varepsilon(X) = 1$.

- $(A, m, \mathbf{1}, \Delta, \varepsilon)$ n'est pas une algèbre de Hopf, on a

$$\Delta \circ m = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta)$$

- Si on étend la graduation de A sur les produits tensoriels via $\deg(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \deg(a_1) + \cdots + \deg(a_n)$, alors les applications ι, m, ε et Δ sont graduées avec

$$\deg(\iota) = 1, \quad \deg(m) = -1, \quad \deg(\varepsilon) = 1, \quad \deg(\Delta) = -1.$$

Algèbre de Frobenius

- Soit A le R-module gradué libre de rang 2 engendré par $\mathbf{1}$ et X, avec

$$\deg(\mathbf{1}) = 1, \qquad \deg(X) = -1.$$

muni d'une structure d'algèbre commutative avec unité $\mathbf{1}$ et multiplication définie par $\mathbf{1}X = X\mathbf{1} = X, X^2 = 0$.

- Soit $\iota : R \to A$, $1 \mapsto \mathbf{1}$ l'application unité. Elle augmente le degré de 1 car $\deg_R(1) = 0$, $\deg_A(\mathbf{1}) = 1$.

- On munit A d'une structure de cogèbre avec comultiplication co(associative, commutative):

$$\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes X + X \otimes \mathbf{1} + cX \otimes X, \quad \Delta(X) = X \otimes X$$

et counité $\varepsilon(\mathbf{1}) = -c, \varepsilon(X) = 1$.

- $(A, m, \mathbf{1}, \Delta, \varepsilon)$ n'est pas une algèbre de Hopf, on a

$$\Delta \circ m = (m \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \Delta)$$

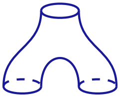
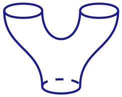
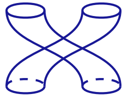
- Si on étend la graduation de A sur les produits tensoriels via $\deg(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \deg(a_1) + \cdots + \deg(a_n)$, alors les applications ι, m, ε et Δ sont graduées avec

$$\deg(\iota) = 1, \quad \deg(m) = -1, \quad \deg(\varepsilon) = 1, \quad \deg(\Delta) = -1.$$

- Si $c = 0$, alors $A \simeq \mathbb{Z}[X]/\langle X^2 \rangle$ et $(A, m, \mathbf{1}, \Delta, \varepsilon)$ est une **algèbre de Frobenius**.

Algèbre A et cobordismes

- Considérons les surfaces S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2 et S_1^1:

S_2^1 :  S_1^2 :  S_0^1 :  S_1^0 :  S_2^2 :  S_1^1 : 

- Chaque S_a^b définit un **cobordisme** d'une union de a cercles vers une union de b cercles.

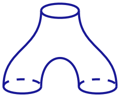
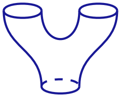
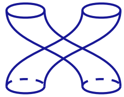
Algèbre A et cobordismes

- Considérons les surfaces S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2 et S_1^1:

- Chaque S_a^b définit un **cobordisme** d'une union de a cercles vers une union de b cercles.
- Soit **Cob** la catégorie dont les objects sont des variétés fermées de dimension 1 et les morhismes sont des 2-cobordismes, *i.e.*
  - Objets $= \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
  - Morphismes $\overline{n} \to \overline{m}$: surface compacte orientée dont la frontière est est la réunion de $n + m$ cercles (n dans la source, m dans le but).
  - **Cob** est monoïdale avec $\otimes$ défini par $\overline{n} \otimes \overline{n'} = \overline{n + n'}$, et le produit tensoriel de morphismes est donné par juxtaposition horizontale des surfaces.

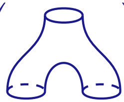
Algèbre A et cobordismes

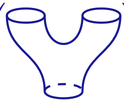
- Considérons les surfaces S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2 et S_1^1:

S_2^1 :  S_1^2 :  S_0^1 :  S_1^0 :  S_2^2 :  S_1^1 : 

- Chaque S_a^b définit un **cobordisme** d'une union de a cercles vers une union de b cercles.
- Soit **Cob** la catégorie dont les objects sont des variétés fermées de dimension 1 et les morhismes sont des 2-cobordismes, *i.e.*
  - Objets $= \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
  - Morphismes $\overline{n} \to \overline{m}$: surface compacte orientée dont la frontière est est la réunion de $n+m$ cercles (n dans la source, m dans le but).
  - **Cob** est monoïdale avec $\otimes$ défini par $\overline{n} \otimes \overline{n'} = \overline{n+n'}$, et le produit tensoriel de morphismes est donné par juxtaposition horizontale des surfaces.
- On construit un foncteur monoïdal $F : \mathbf{Cob} \to R-\mathrm{mod}_0$ par $F(\overline{n}) := A^{\otimes n}$ et

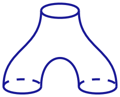
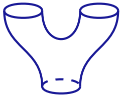
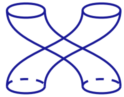
$$F(S_2^1) = m, \quad F(S_1^2) = \Delta, \quad F(S_0^1) = \iota, \quad F(S_1^0) = \varepsilon, \quad F(S_2^2) = \sigma, \quad F(S_1^1) = \mathrm{id}.$$

$F\Bigg($  $\Bigg) : A \otimes A \xrightarrow{m} A := \begin{cases} 1 \otimes 1 \mapsto 1, & 1 \otimes X \mapsto X, \\ X \otimes X \mapsto 0, & X \otimes 1 \mapsto X, \end{cases}$

$F\Bigg($  $\Bigg) : A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A := \begin{cases} 1 \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X, \\ X \mapsto X \otimes X, \end{cases}$

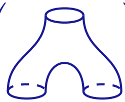
Algèbre A et cobordismes

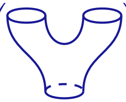
- Considérons les surfaces S_2^1, S_1^2, S_0^1, S_1^0, S_2^2 et S_1^1:

S_2^1 :  S_1^2 :  S_0^1 :  S_1^0 :  S_2^2 :  S_1^1 : 

- Chaque S_a^b définit un **cobordisme** d'une union de a cercles vers une union de b cercles.
- Soit **Cob** la catégorie dont les objects sont des variétés fermées de dimension 1 et les morhismes sont des 2-cobordismes, *i.e.*
  - Objets $= \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
  - Morphismes $\overline{n} \to \overline{m}$: surface compacte orientée dont la frontière est est la réunion de $n+m$ cercles (n dans la source, m dans le but).
  - **Cob** est monoïdale avec $\otimes$ défini par $\overline{n} \otimes \overline{n'} = \overline{n+n'}$, et le produit tensoriel de morphismes est donné par juxtaposition horizontale des surfaces.
- On construit un foncteur monoïdal $F : \textbf{Cob} \to R - \mathrm{mod}_0$ par $F(\overline{n}) := A^{\otimes n}$ et

$$F(S_2^1) = m, \quad F(S_1^2) = \Delta, \quad F(S_0^1) = \iota, \quad F(S_1^0) = \varepsilon, \quad F(S_2^2) = \sigma, \quad F(S_1^1) = \mathrm{id}.$$

F () $: A \otimes A \xrightarrow{m} A := \begin{cases} 1 \otimes 1 \mapsto 1, & 1 \otimes X \mapsto X, \\ X \otimes X \mapsto 0, & X \otimes 1 \mapsto X, \end{cases}$

F () $: A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A := \begin{cases} 1 \mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X, \\ X \mapsto X \otimes X, \end{cases}$

- **Remarque :** F est un 2-TQFT (topological quantum field theory) associé à l'algèbre de Frobenius $(A_{|c=0}, m, \mathbf{1}, \Delta, \varepsilon)$.

Cubes

- Soit I un ensemble de cardinal $|I|$, et $r(I) := (J, a)$ tels que $J \subset I$ et $a \notin J$.
- **Notation :** $\{a\}$ est noté par a, et $J_1 \cup J_2$ par $J_1 J_2$, *e.g.* $J_1 a = J_1 \cup \{a\}$.

Cubes

- Soit I un ensemble de cardinal $|I|$, et $r(I) := (J, a)$ tels que $J \subset I$ et $a \notin J$.
- **Notation :** $\{a\}$ est noté par a, et $J_1 \cup J_2$ par $J_1 J_2$, *e.g.* $J_1 a = J_1 \cup \{a\}$.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **I-cube commutatif** V sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets $V(J)$ pour tout sous-ensemble J de I, et de morphismes $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ pour tout $(J, a) \in r(I)$ tels que

$$\xi_b^V(Ja) \circ \xi_a^V(J) = \xi_a^V(Jb) \circ \xi_b^v(J)$$

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\xi_a^V(J)"] \arrow[d, "\xi_b^V(J)"'] & V(Ja) \arrow[d, "\xi_b^V(Ja)"] \\ V(Jb) \arrow[r, "\xi_a^V(Jb)"'] & V(Jab) \end{tikzcd}$$

pour tout (J, a, b) tel que $a \neq b$ et $a \notin J, b \notin J$.

Cubes

- Soit I un ensemble de cardinal $|I|$, et $r(I) := (J, a)$ tels que $J \subset I$ et $a \notin J$.
- **Notation :** $\{a\}$ est noté par a, et $J_1 \cup J_2$ par $J_1 J_2$, *e.g.* $J_1 a = J_1 \cup \{a\}$.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **I-cube commutatif** V sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets $V(J)$ pour tout sous-ensemble J de I, et de morphismes $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ pour tout $(J, a) \in r(I)$ tels que

$$\xi_b^V(Ja) \circ \xi_a^V(J) = \xi_a^V(Jb) \circ \xi_b^v(J)$$

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\xi_a^V(J)"] \arrow[d, "\xi_b^V(J)"'] & V(Ja) \arrow[d, "\xi_b^V(Ja)"] \\ V(Jb) \arrow[r, "\xi_a^V(Jb)"'] & V(Jab) \end{tikzcd}$$

pour tout (J, a, b) tel que $a \neq b$ et $a \notin J, b \notin J$.

- **Exemple :**
  - Si $I = \varnothing$, un I-cube est un objet de $\mathcal{C}$.
  - Si $I = \{a\}$, un I-cube est un morphisme de $\mathcal{C}$.
  - Si $I = \{a, b\}$, un I-cube est la donnée d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} V(\varnothing) \arrow[r] \arrow[d] & V(a) \arrow[d] \\ V(b) \arrow[r] & V(ab) \end{tikzcd}$$

Cubes

- Soit I un ensemble de cardinal $|I|$, et $r(I) := (J, a)$ tels que $J \subset I$ et $a \notin J$.
- **Notation :** $\{a\}$ est noté par a, et $J_1 \cup J_2$ par $J_1 J_2$, *e.g.* $J_1 a = J_1 \cup \{a\}$.
- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **I-cube commutatif** V sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets $V(J)$ pour tout sous-ensemble J de I, et de morphismes $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ pour tout $(J, a) \in r(I)$ tels que

$$\xi_b^V(Ja) \circ \xi_a^V(J) = \xi_a^V(Jb) \circ \xi_b^v(J)$$

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\xi_a^V(J)"] \arrow[d, "\xi_b^V(J)"'] & V(Ja) \arrow[d, "\xi_b^V(Ja)"] \\ V(Jb) \arrow[r, "\xi_a^V(Jb)"'] & V(Jab) \end{tikzcd}$$

pour tout (J, a, b) tel que $a \neq b$ et $a \notin J, b \notin J$.

- **Exemple :**
  - Si $I = \varnothing$, un I-cube est un objet de $\mathcal{C}$.
  - Si $I = \{a\}$, un I-cube est un morphisme de $\mathcal{C}$.
  - Si $I = \{a, b\}$, un I-cube est la donnée d'un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} V(\varnothing) \arrow[r] \arrow[d] & V(a) \arrow[d] \\ V(b) \arrow[r] & V(ab) \end{tikzcd}$$

- Un **I-cube anticommutatif** V sur $\mathcal{C}$ est la même donnée, mais les morphismes doivent satisfaire

$$\xi_b^V(Ja) \circ \xi_a^V(J) + \xi_a^V(Jb) \circ \xi_b^v(J) = 0.$$

Cubes

- Un morphisme $\psi : V \to W$ entre deux I-cubes sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection de morphismes $\psi(J) : V(J) \to W(J)$ pour tout $J \subset I$ tels que

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\psi(J)"] \arrow[d, "\xi_a^V(J)"'] & W(J) \arrow[d, "\xi_a^W(J)"] \\ V(Ja) \arrow[r, "\psi(Ja)"'] & W(Ja) \end{tikzcd}$$

est commutatif. C'est un **isomorphisme** si tout $\psi(J)$ est un isomorphisme.

Cubes

- Un morphisme $\psi : V \to W$ entre deux I-cubes sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection de morphismes $\psi(J) : V(J) \to W(J)$ pour tout $J \subset I$ tels que

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\psi(J)"] \arrow[d, "\xi_a^V(J)"'] & W(J) \arrow[d, "\xi_a^W(J)"] \\ V(Ja) \arrow[r, "\psi(Ja)"'] & W(Ja) \end{tikzcd}$$

  est commutatif. C'est un **isomorphisme** si tout $\psi(J)$ est un isomorphisme.

- **Un cas important :** Soit $a \in I$, et $K = I - \{a\}$. Si V est un I-cube, on considère des K-cubes $V_a(\star 0)$ et $V_a(\star 1)$ définis par

$$V_a(\star 0)(J) = V(J), \qquad V_a(\star 1)(J) = V(Ja) \text{ pour } J \subset K.$$

  - Les morphismes des cubes $V_a(\star_0)$ et $V_a(\star 1)$ sont déterminés par les ξ_b^V de V pour $b \in K$.
  - Le morphisme ξ_a^V définit une application de K-cubes $V_a(\star 0) \to V_a(\star 1)$.

Cubes

- Un morphisme $\psi : V \to W$ entre deux I-cubes sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection de morphismes $\psi(J) : V(J) \to W(J)$ pour tout $J \subset I$ tels que

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\psi(J)"] \arrow[d, "\xi_a^V(J)"'] & W(J) \arrow[d, "\xi_a^W(J)"] \\ V(Ja) \arrow[r, "\psi(Ja)"'] & W(Ja) \end{tikzcd}$$

  est commutatif. C'est un **isomorphisme** si tout $\psi(J)$ est un isomorphisme.

- **Un cas important :** Soit $a \in I$, et $K = I - \{a\}$. Si V est un I-cube, on considère des K-cubes $V_a(\star 0)$ et $V_a(\star 1)$ définis par

$$V_a(\star 0)(J) = V(J), \qquad V_a(\star 1)(J) = V(Ja) \text{ pour } J \subset K.$$

  - Les morphismes des cubes $V_a(\star_0)$ et $V_a(\star 1)$ sont déterminés par les ξ_b^V de V pour $b \in K$.
  - Le morphisme ξ_a^V définit une application de K-cubes $V_a(\star 0) \to V_a(\star 1)$.

- Si $\mathcal{C} = R - \mathrm{mod}_0$, alors
  - une application $\psi : V \to W$ est de degré i si toutes les $\psi(J) : V(J) \to W(J)$ sont de degré i pour tout $J \subset I$.
  - on note $V\{i\}$ le cube V avec le décalage de graduation: $V\{i\}(J) = V(J)\{i\}$ pour tout $J \subset I$,
  - une application $\psi : V \to W$ de degré i induit une application $V \to W\{i\}$ préservant le degré.

Cubes

- Un morphisme $\psi : V \to W$ entre deux I-cubes sur $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection de morphismes $\psi(J) : V(J) \to W(J)$ pour tout $J \subset I$ tels que

$$\begin{tikzcd} V(J) \arrow[r, "\psi(J)"] \arrow[d, "\xi_a^V(J)"'] & W(J) \arrow[d, "\xi_a^W(J)"] \\ V(Ja) \arrow[r, "\psi(Ja)"'] & W(Ja) \end{tikzcd}$$

est commutatif. C'est un **isomorphisme** si tout $\psi(J)$ est un isomorphisme.

- **Un cas important :** Soit $a \in I$, et $K = I - \{a\}$. Si V est un I-cube, on considère des K-cubes $V_a(\star 0)$ et $V_a(\star 1)$ définis par

$$V_a(\star 0)(J) = V(J), \qquad V_a(\star 1)(J) = V(Ja) \text{ pour } J \subset K.$$

  - Les morphismes des cubes $V_a(\star_0)$ et $V_a(\star 1)$ sont déterminés par les ξ_b^V de V pour $b \in K$.
  - Le morphisme ξ_a^V définit une application de K-cubes $V_a(\star 0) \to V_a(\star 1)$.
- Si $\mathcal{C} = R - \mathrm{mod}_0$, alors
  - une application $\psi : V \to W$ est de degré i si toutes les $\psi(J) : V(J) \to W(J)$ sont de degré i pour tout $J \subset I$.
  - on note $V\{i\}$ le cube V avec le décalage de graduation: $V\{i\}(J) = V(J)\{i\}$ pour tout $J \subset I$,
  - une application $\psi : V \to W$ de degré i induit une application $V \to W\{i\}$ préservant le degré.
- Produit tensoriel de cubes: si V, W sont deux I-cubes sur $\mathcal{C}$, alors $V \otimes W$ est défini par

$$(V \otimes W)(J) = V(J) \otimes_R W(J), \qquad \xi_a^{V\otimes W}(J) = \xi_a^V(J) \otimes_R \xi_a^W(J),\ (J, a) \in r(I).$$

L' (anti)-commutativité de $V \otimes W$ est obtenue selon la règle des signes.

Cubes et complexes

- Si V est un I-cube commutatif, on peut le rendre anti-commutatif en le tensorisant avec un cube anti-commutatif 'prototypique'.

Cubes et complexes

- Si V est un I-cube commutatif, on peut le rendre anti-commutatif en le tensorisant avec un cube anti-commutatif 'prototypique'.
  - Pour J un ensemble fini muni d'un ordre total $<$, soit p la fonction parité, *i.e.* $p(x,y)=0$ si y s'obtient à partir de x par un nombre fini de transpositions d'éléments consécutifs pour $<$, et $p(x,y)=1$ sinon.
  - On associe un R-module gradué par $E(J) = R[x \mid x \in J]/\langle x = (-1)^{p(x,y)}y\rangle$, qui est un R-module libre gradué de rang 1.
  - Pour $a \notin J$, on a un isomorphisme canonique de R-modules $E(J) \to E(Ja)$ qui envoie x sur xa. Pour $a \neq b$, le diagramme suivant anticommute:

$$\begin{tikzcd}
E(J) \arrow[r] \arrow[d] & E(Ja) \arrow[d] \\
E(Jb) \arrow[r, "\psi(Ja)"'] & E(Jab)
\end{tikzcd}$$

  - Soit E_I le I-cube défini par $E_I(L) = E(L)$ pour $J \subset I$ et $E_I(J) \to E_I(Ja)$ le morphisme décrit ci-dessus. Alors E_I est un cube anticommutatif.
  - Si V est un I-cube commutatif, alors $V \otimes E_I$ est un I-cube anticommutatif.

Cubes et complexes

- Si V est un I-cube commutatif, on peut le rendre anti-commutatif en le tensorisant avec un cube anti-commutatif 'prototypique'.
  - Pour J un ensemble fini muni d'un ordre total $<$, soit p la fonction parité, *i.e.* $p(x,y) = 0$ si y s'obtient à partir de x par un nombre fini de transpositions d'éléments consécutifs pour $<$, et $p(x,y) = 1$ sinon.
  - On associe un R-module gradué par $E(J) = R[x \mid x \in J]/\langle x = (-1)^{p(x,y)} y\rangle$, qui est un R-module libre gradué de rang 1.
  - Pour $a \notin J$, on a un isomorphisme canonique de R-modules $E(J) \to E(Ja)$ qui envoie x sur xa. Pour $a \neq b$, le diagramme suivant anticommute:

$$\begin{tikzcd} E(J) \arrow[r] \arrow[d] & E(Ja) \arrow[d] \\ E(Jb) \arrow[r, "\psi(Ja)"'] & E(Jab) \end{tikzcd}$$

  - Soit E_I le I-cube défini par $E_I(L) = E(L)$ pour $J \subset I$ et $E_I(J) \to E_I(Ja)$ le morphisme décrit ci-dessus. Alors E_I est un cube anticommutatif.
  - Si V est un I-cube commutatif, alors $V \otimes E_I$ est un I-cube anticommutatif.
- Soit V un I-cube anticommutatif sur $\mathcal{C}$. On lui associe un complexe $\overline{C}(V) = (\overline{C}^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$\overline{C}^i(V) = \bigoplus_{J\subset I, |J|=i} V(J), \qquad d^i : \overline{C}^i(V) \to \overline{C}^{i+1}(V), x \mapsto d^i(x) = \sum_{a \in I-J} \xi_a^V(J)x.$$

Cubes et complexes : exemples

- **Exemple 1 :** Si $I = \{a\}$, alors $\overline{C}^i(V) = \begin{cases} V(\varnothing) \text{ si } i = 0 \\ V(a) \text{ si } i = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $d^0 = \xi_a^V(\varnothing)$ et $d^i = 0$ si $i \neq 0$, donc $\overline{C}(V)$ est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow V(\varnothing) \xrightarrow{\xi_a^V(\varnothing)} V(I) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Cubes et complexes : exemples

- **Exemple 1 :** Si $I = \{a\}$, alors $\overline{C}^i(V) = \begin{cases} V(\varnothing) \text{ si } i = 0 \\ V(a) \text{ si } i = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $d^0 = \xi_a^V(\varnothing)$ et $d^i = 0$ si $i \neq 0$, donc $\overline{C}(V)$ est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow V(\varnothing) \xrightarrow{\xi_a^V(\varnothing)} V(I) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

- **Exemple 2 :** Si $I = \{a, b\}$, alors $\overline{C}^i(V) = \begin{cases} V(\varnothing) \text{ si } i = 0 \\ V(a) \oplus V(b) \text{ si } i = 1 \\ V(ab) \text{ si } i = 2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ et les différentielles:

$$d^0 : V(\varnothing) \to V(a) \oplus V(b), \qquad d^1 : V(a) \oplus V(b) \to V(ab),$$
$$d^0 = \xi_a^V(\varnothing) + \xi_b^V(\varnothing) \qquad d^1 = (\xi_a^V(b), \xi_b^V(a)).$$

Cubes et complexes : exemples

- **Exemple 1 :** Si $I = \{a\}$, alors $\overline{C}^i(V) = \begin{cases} V(\varnothing) \text{ si } i = 0 \\ V(a) \text{ si } i = 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$
- $d^0 = \xi_a^V(\varnothing)$ et $d^i = 0$ si $i \neq 0$, donc $\overline{C}(V)$ est le complexe

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow V(\varnothing) \xrightarrow{\xi_a^V(\varnothing)} V(I) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

- **Exemple 2 :** Si $I = \{a, b\}$, alors $\overline{C}^i(V) = \begin{cases} V(\varnothing) \text{ si } i = 0 \\ V(a) \oplus V(b) \text{ si } i = 1 \\ V(ab) \text{ si } i = 2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ et les différentielles:

$$d^0 : V(\varnothing) \to V(a) \oplus V(b), \qquad d^1 : V(a) \oplus V(b) \to V(ab),$$
$$d^0 = \xi_a^V(\varnothing) + \xi_b^V(\varnothing) \qquad d^1 = (\xi_a^V(b), \xi_b^V(a)).$$

- **Quelques propriétés de ce complexe :**
  - Si pour $a \in I$ et tout $J \subset I - \{a\}$, l'application $\xi_a^V : V(J) \to V(Ja)$ est un isomorphisme, alors $\overline{C}(V)$ est acyclique.
  - Si pour $a \in I$ le morphisme de structure $\xi_a^V : V_a(\star 0) \to V_a(\star 1)$ est un isomorphisme, alors le complexe $\overline{C}(V \otimes E_I)$ est acyclique.
  - Si V et W sont deux I-cubes anti-commutatifs, on a

$$\overline{C}(V \oplus W) = \overline{C}(V) \oplus \overline{C}(W).$$

II. Homologie de Khovanov

Cube de résolution d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, et D un diagramme de L avec k croisements, dont l'ensemble est noté I.

$$\{\text{Résolutions } L_\xi \text{ de } L,\ \xi \in \{0,1\}^k\} \quad \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \quad \{\text{ Sous-ensembles } J \subset I\}$$

où à $J \subset I$, on associe la résolution donné par $\xi_k = 1$ si $k \in J$, 0 sinon.

Cube de résolution d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, et D un diagramme de L avec k croisements, dont l'ensemble est noté I.

$$\{\text{Résolutions } L_\xi \text{ de } L,\ \xi \in \{0,1\}^k\} \quad \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \quad \{\text{ Sous-ensembles } J \subset I\}$$

  où à $J \subset I$, on associe la résolution donné par $\xi_k = 1$ si $k \in J$, 0 sinon.

- Au cube des résolutions de L, on va associer un I-cube commutatif V_L sur $R - \mathrm{mod}_0$:

Cube de résolution d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, et D un diagramme de L avec k croisements, dont l'ensemble est noté I.

$$\{\text{Résolutions } L_\xi \text{ de } L,\ \xi \in \{0,1\}^k\} \quad \xleftrightarrow{1-1} \quad \{\text{ Sous-ensembles } J \subset I\}$$

  où à $J \subset I$, on associe la résolution donné par $\xi_k = 1$ si $k \in J$, 0 sinon.

- Au cube des résolutions de L, on va associer un I-cube commutatif V_L sur $R - \mathrm{mod}_0$:
  - $V_L(J) = F(L_\xi)\{-|J|\} = A^{\otimes k}\{-|J|\}$ où L_ξ est le diagramme de la résolution associée à J, qui est un objet de **Cob**, et F est le foncteur $F : \mathrm{Cob} \to R - \mathrm{mod}_0$.
  - Rappelons que F associe à une union de k cercles disjoints le R-module $A^{\otimes k}$.

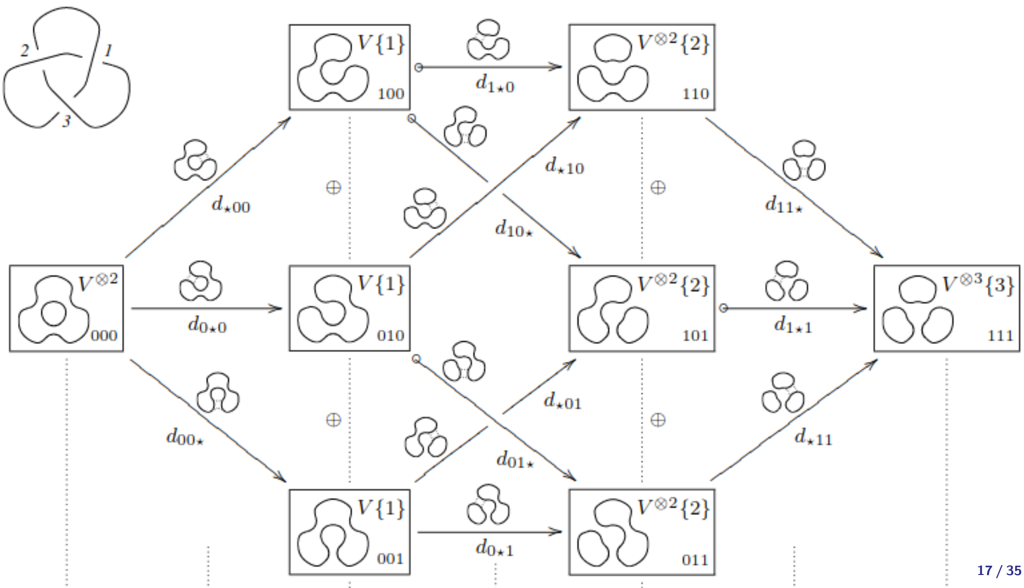
Cube de résolution d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, et D un diagramme de L avec k croisements, dont l'ensemble est noté I.

$$\{\text{Résolutions } L_\xi \text{ de } L,\ \xi \in \{0,1\}^k\} \quad \xleftrightarrow{1-1} \quad \{\text{ Sous-ensembles } J \subset I\}$$

où à $J \subset I$, on associe la résolution donné par $\xi_k = 1$ si $k \in J$, 0 sinon.

- Au cube des résolutions de L, on va associer un I-cube commutatif V_L sur $R - \mathrm{mod}_0$:
  - $V_L(J) = F(L_\xi)\{-|J|\} = A^{\otimes k}\{-|J|\}$ où L_ξ est le diagramme de la résolution associée à J, qui est un objet de **Cob**, et F est le foncteur $F : \mathrm{Cob} \to R - \mathrm{mod}_0$.
  - Rappelons que F associe à une union de k cercles disjoints le R-module $A^{\otimes k}$.



Cube de résolution d'un entrelacs

- Reste à définir les applications de structure du cube: pour $(J, a) \in r(I)$, on veut une application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$.

Cube de résolution d'un entrelacs

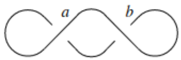
- Reste à définir les applications de structure du cube: pour $(J, a) \in r(I)$, on veut une application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$.
- Les résolutions $L(J)$ et $L(Ja)$ associées à J et Ja diffèrent seulement en un voisinage U du croisement a, *e.g.*

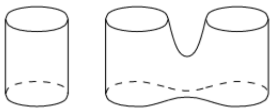
L $\quad$ $L(J)$ $\quad$ $L(Ja)$

Cube de résolution d'un entrelacs

- Reste à définir les applications de structure du cube: pour $(J, a) \in r(I)$, on veut une application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$.
- Les résolutions $L(J)$ et $L(Ja)$ associées à J et Ja différent seulement en un voisinage U du croisement a, *e.g.*

L $\quad$ $L(J)$ $\quad$ $L(Ja)$

- $L(J)$ (resp. $L(J_a)$) sont identifiés à des 1-sous-variétés de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (resp. $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$).
- Soit S une surface plongée dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ telle que
  - $\partial S = (L(J), L(Ja))$,
  - En dehors de $U \times [0,1]$, S est le produit direct de $J(L) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus U)$ et l'intervalle $[0,1]$.
  - La composante connexe de S qui a intersection non vide avec $U \times [0,1]$ est homéomorphe à la 2-sphère avec trois trous.
  - Le projection $S \subset \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to [0,1]$, appelée **hauteur**, a un unique point critique qui est le point selle dans $U \times [0,1]$.
- **Exemple :** $I = \{a, b\}$, $J = \{a\}$, $L \to$ 

$L(J) \to$  $\quad L(Jb) \to$  $\quad S =$  S

Cube de résolution d'un entrelacs

- On définit alors l'application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ par

$$F(S) : F(L(J)) \to F(L(Ja))$$

Cube de résolution d'un entrelacs

- On définit alors l'application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ par

$$F(S) : F(L(J)) \to F(L(Ja))$$

- **Proposition :** Le degré de $F(S)$ est égal à la caractéristique d'Euler de S, qui est -1. Mais

$$V(J) = F(L(J))\{-|J|\}, \qquad V(Ja) = F(L(Ja))\{-|J| - 1\}$$

  donc ξ_a^V est bien une application entre R-modules qui préserve le degré.

Cube de résolution d'un entrelacs

- On définit alors l'application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ par

$$F(S) : F(L(J)) \to F(L(Ja))$$

- **Proposition :** Le degré de $F(S)$ est égal à la caractéristique d'Euler de S, qui est -1. Mais

$$V(J) = F(L(J))\{-|J|\}, \qquad V(Ja) = F(L(Ja))\{-|J| - 1\}$$

  donc ξ_a^V est bien une application entre R-modules qui préserve le degré.

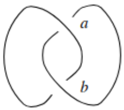
- **Conclusion :** Le cube V est un I-cube commutatif sur $R - \mathrm{mod}_0$.

Cube de résolution d'un entrelacs

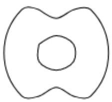
- On définit alors l'application $\xi_a^V(J) : V(J) \to V(Ja)$ par
$$F(S) : F(L(J)) \to F(L(Ja))$$

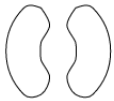
- **Proposition :** Le degré de $F(S)$ est égal à la caractéristique d'Euler de S, qui est -1. Mais
$$V(J) = F(L(J))\{-|J|\}, \qquad V(Ja) = F(L(Ja))\{-|J|-1\}$$
donc ξ_a^V est bien une application entre R-modules qui préserve le degré.

- **Conclusion :** Le cube V est un I-cube commutatif sur $R - \mathrm{mod}_0$.

- **Exemple :** Si $D =$ 

,alors

$L(\varnothing) =$  $\overset{F}{\rightsquigarrow} A^{\otimes 2}$ $\qquad$ $L(b) =$  $\overset{F}{\rightsquigarrow} A$

$L(b) =$  $\overset{F}{\rightsquigarrow} A$ $\qquad$ $L(ab) =$  $\overset{F}{\rightsquigarrow} A^{\otimes 2}$

- Le cube V a donc la forme
$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes 2} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "m"'] & A\{-1\} \arrow[d, "\Delta"] \\
A\{-1\} \arrow[r, "\Delta"'] & A^{\otimes 2}\{-2\}
\end{tikzcd}$$

Complexe de Khovanov d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, on vient de construire un I-cube commutatif V_L associé à L, où I est l'ensemble des croisements de L:

$$V_L \otimes E_I \text{ est un } I\text{-cube anti-commutatif associé à } L$$

Complexe de Khovanov d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, on vient de construire un I-cube commutatif V_L associé à L, où I est l'ensemble des croisements de L:

$$V_L \otimes E_I \text{ est un } I\text{-cube anti-commutatif associé à } L$$

- $\overline{C}(L) := \overline{C}(V_L \otimes E_I)$ est un complexe de R-modules gradués et de morphismes préservant le degré. Il ne dépend pas de l'orientation de L.

Complexe de Khovanov d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, on vient de construire un I-cube commutatif V_L associé à L, où I est l'ensemble des croisements de L:

$$V_L \otimes E_I \text{ est un } I\text{-cube anti-commutatif associé à } L$$

- $\overline{C}(L) := \overline{C}(V_L \otimes E_I)$ est un complexe de R-modules gradués et de morphismes préservant le degré. Il ne dépend pas de l'orientation de L.
- On va ensuite définir un autre complexe, décalé, par

$$C(L) := \overline{C}(L)[x(L)]\{2x(L) - y(L)\}$$

  - Ceci est à mettre en perspective avec le terme $(-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}$ qui renormalise le crochet de Kauffman pour obtenir le polynôme de Jones.
  - Soit $H^i(L)$ le i-ème groupe de cohomologie du complexe $C(L)$, qui est un R-module gradué de type fini.

Complexe de Khovanov d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, on vient de construire un I-cube commutatif V_L associé à L, où I est l'ensemble des croisements de L:

$$V_L \otimes E_I \text{ est un } I\text{-cube anti-commutatif associé à } L$$

- $\overline{C}(L) := \overline{C}(V_L \otimes E_I)$ est un complexe de R-modules gradués et de morphismes préservant le degré. Il ne dépend pas de l'orientation de L.
- On va ensuite définir un autre complexe, décalé, par

$$C(L) := \overline{C}(L)[x(L)]\{2x(L) - y(L)\}$$

  - Ceci est à mettre en perspective avec le terme $(-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}$ qui renormalise le crochet de Kauffman pour obtenir le polynôme de Jones.
  - Soit $H^i(L)$ le i-ème groupe de cohomologie du complexe $C(L)$, qui est un R-module gradué de type fini.
- **Théorème principal :** Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme des R-modules gradués $H^i(L)$ est un invariant de L.
Si $H^i(D) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} H^{i,j}(D)$, alors pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme du groupe abélien $H^{i,j}(D)$ est un invariant de L.

Complexe de Khovanov d'un entrelacs

- Soit L un entrelacs, on vient de construire un I-cube commutatif V_L associé à L, où I est l'ensemble des croisements de L:

$$V_L \otimes E_I \text{ est un } I\text{-cube anti-commutatif associé à } L$$

- $\overline{C}(L) := \overline{C}(V_L \otimes E_I)$ est un complexe de R-modules gradués et de morphismes préservant le degré. Il ne dépend pas de l'orientation de L.
- On va ensuite définir un autre complexe, décalé, par

$$C(L) := \overline{C}(L)[x(L)]\{2x(L) - y(L)\}$$

  - Ceci est à mettre en perspective avec le terme $(-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}$ qui renormalise le crochet de Kauffman pour obtenir le polynôme de Jones.
  - Soit $H^i(L)$ le i-ème groupe de cohomologie du complexe $C(L)$, qui est un R-module gradué de type fini.
- **Théorème principal :** Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme des R-modules gradués $H^i(L)$ est un invariant de L.
  Si $H^i(D) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} H^{i,j}(D)$, alors pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$, la classe d'isomorphisme du groupe abélien $H^{i,j}(D)$ est un invariant de L.
- **Preuve :** Il faut prouver que si deux diagrammes d'entrelacs L et L' sont reliés par des mouvements de Reidemeister, les complexes $C(L)$ et $C(L')$ ont la même homologie.

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition :** Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q+q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}\langle L\rangle = (1-q^2)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$$

où $\widehat{\chi}(H^i(L))$ est la caractéristique d'Euler graduée de $H^i(L)$.

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition :** Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q+q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}\langle L\rangle = (1-q^2)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$$

  où $\widehat{\chi}(H^i(L))$ est la caractéristique d'Euler graduée de $H^i(L)$.

- **Esquisse de preuve :**
  - Notons que $\widehat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n}\widehat{\chi}(M)$ pour un R-module gradué de type fini R.
  - Pour un complexe borné M : $\quad \ldots \longrightarrow M^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \ldots$ de R-modules gradués de type fini, on définit

$$\widehat{\chi}(M) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(M)).$$

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition :** Soit L un entrelacs orienté, alors

$$K(L) := (q + q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)} q^{y(L)-2x(L)} \langle L \rangle = (1 - q^2) \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \widehat{\chi}(H^i(L))$$

  où $\widehat{\chi}(H^i(L))$ est la caractéristique d'Euler graduée de $H^i(L)$.

- **Esquisse de preuve :**
  - Notons que $\widehat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n}\widehat{\chi}(M)$ pour un R-module gradué de type fini R.
  - Pour un complexe borné M : $\quad \ldots \longrightarrow M^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \ldots$ de R-modules gradués de type fini, on définit

$$\widehat{\chi}(M) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \widehat{\chi}(H^i(M)).$$

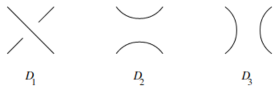
  - Puisque $\widehat{\chi}(C(L)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} car(-1)^i \widehat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $\mathbf{K(L) = (1 - q^2)\widehat{\chi}(C(D))}$.

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition :** Soit L un entrelacs orienté, alors

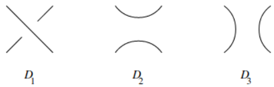
$$K(L) := (q+q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}\langle L\rangle = (1-q^2)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$$

  où $\widehat{\chi}(H^i(L))$ est la caractéristique d'Euler graduée de $H^i(L)$.

- **Esquisse de preuve :**
  - Notons que $\widehat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n}\widehat{\chi}(M)$ pour un R-module gradué de type fini R.
  - Pour un complexe borné M : $\quad \ldots \longrightarrow M^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \ldots$ de R-modules gradués de type fini, on définit
$$\widehat{\chi}(M) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(M)).$$
  - Puisque $\widehat{\chi}(C(L)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} car(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $\mathbf{K(L) = (1-q^2)}\widehat{\chi}\mathbf{(C(D))}$.
  - Pour des diagrammes D_1, D_2 et D_3 qui diffèrent via: 

, le complexe $\overline{C}(D_1)[1]$ est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes $\overline{C}(D_2) \to \overline{C}(D_3)\{-1\}$. Donc
$$\widehat{\chi}(\overline{C}(D_1)) = \widehat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - \widehat{\chi}(\overline{C}(D_3)\{-1\}) = \widehat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - q\widehat{\chi}(\overline{C}(D_3))$$

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition :** Soit L un entrelacs orienté, alors
$$K(L) := (q+q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}\langle L\rangle = (1-q^2)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$$
où $\widehat{\chi}(H^i(L))$ est la caractéristique d'Euler graduée de $H^i(L)$.
- **Esquisse de preuve :**
  - Notons que $\widehat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n}\widehat{\chi}(M)$ pour un R-module gradué de type fini R.
  - Pour un complexe borné M : $\quad \ldots \longrightarrow M^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \ldots$ de R-modules gradués de type fini, on définit
$$\widehat{\chi}(M) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(M)).$$
  - Puisque $\widehat{\chi}(C(L)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} car(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $\mathbf{K(L) = (1-q^2)\widehat{\chi}(C(D))}$.
  - Pour des diagrammes D_1, D_2 et D_3 qui diffèrent via: 

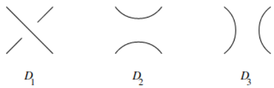
, le complexe $\overline{C}(D_1)[1]$ est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes $\overline{C}(D_2) \to \overline{C}(D_3)\{-1\}$. Donc
$$\widehat{\chi}(\overline{C}(D_1)) = \widehat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - \widehat{\chi}(\overline{C}(D_3)\{-1\}) = \widehat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - q\widehat{\chi}(\overline{C}(D_3))$$
  - D'autre part, $\langle D_1\rangle = \langle D_2\rangle - q\langle D_3\rangle$.

Lien avec le polynôme de Jones

- **Proposition :** Soit L un entrelacs orienté, alors

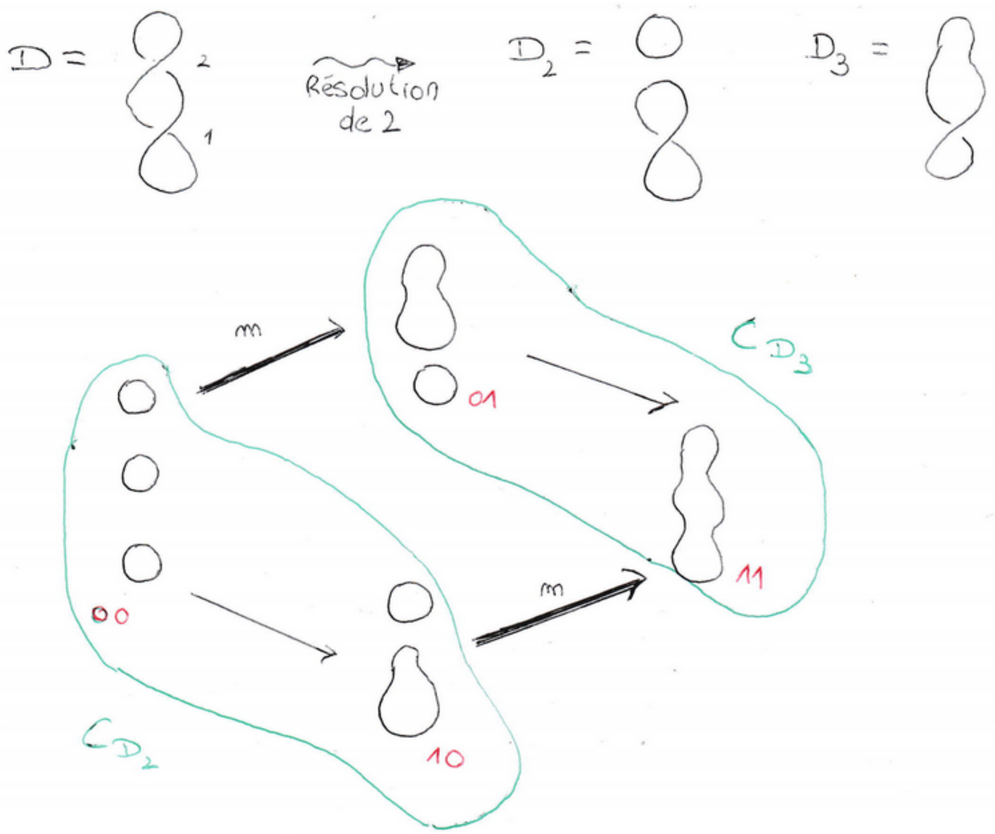
$$K(L) := (q+q^{-1})J(L) = (-1)^{x(L)}q^{y(L)-2x(L)}\langle L\rangle = (1-q^2)\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$$

où $\widehat{\chi}(H^i(L))$ est la caractéristique d'Euler graduée de $H^i(L)$.

- **Esquisse de preuve :**
  - Notons que $\widehat{\chi}(M\{n\}) = q^{-n}\widehat{\chi}(M)$ pour un R-module gradué de type fini R.
  - Pour un complexe borné M : $\quad \ldots \longrightarrow M^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \ldots$ de R-modules gradués de type fini, on définit
  $$\widehat{\chi}(M) = \sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(M)).$$
  - Puisque $\widehat{\chi}(C(L)) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} car(-1)^i\widehat{\chi}(H^i(L))$, il suffit de prouver que $\mathbf{K(L) = (1-q^2)}\widehat{\chi}\mathbf{(C(D))}$.
  - Pour des diagrammes D_1, D_2 et D_3 qui diffèrent via: 

, le complexe $\overline{C}(D_1)[1]$ est isomorphe au cône d'un morphisme de complexes $\overline{C}(D_2) \to \overline{C}(D_3)\{-1\}$. Donc
  $$\widehat{\chi}(\overline{C}(D_1)) = \widehat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - \widehat{\chi}(\overline{C}(D_3)\{-1\}) = \widehat{\chi}(\overline{C}(D_2)) - q\widehat{\chi}(\overline{C}(D_3))$$
  - D'autre part, $\langle D_1\rangle = \langle D_2\rangle - q\langle D_3\rangle$.
  - Si D est une réunion disjointe de k cercles, alors
  $$\widehat{\chi}(\overline{C}(D)) = \widehat{\chi}(A^{\otimes k}) = (q+q^{-1})^k\widehat{\chi}(R) = \frac{(q+q^{-1})^k}{1-q^2}$$
  et $\langle D\rangle = (q+q^{-1})^k$.
  - Puisque $\widehat{\chi}(C(D)) = \widehat{\chi}(\overline{D}[x(D)]\{2x(D)-y(D)\})$, $\widehat{\chi}(C(D)) = (-1)^{x(D)}q^{y(D)-2x(D)}\widehat{\chi}(\overline{C}(D))$.

Une illustration



$$C_D = \mathrm{Cone}\left(C_{D_2} \xrightarrow{m} C_{D_3} \right)$$

avec les bons décalages.

III. Invariance par mouvements de Reidemeister

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+\mathbf{1}}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

- C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i : C_i \to C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

- C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i : C_i \to C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes $C_1, \ldots, C_k$ tels que

$$C \longleftarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longleftarrow \cdots \longrightarrow C_k \longleftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

- C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i : C_i \to C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes $C_1, \ldots, C_k$ tels que

$$C \longleftarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longleftarrow \cdots \longrightarrow C_k \longleftarrow C'$$

  où les flèches sont des quasi-isomorphismes.
- C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$ si il existe des morphismes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $g \circ f \sim \mathrm{id}_C$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}_{C'}$.

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

- C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i : C_i \to C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes $C_1, \dots, C_k$ tels que

$$C \longleftarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longleftarrow \cdots \longrightarrow C_k \longleftarrow C'$$

où les flèches sont des quasi-isomorphismes.
- C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$ si il existe des morphismes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $g \circ f \sim \mathrm{id}_C$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}_{C'}$.
- On a les implications suivantes:

$$\boxed{\text{Isomorphes} \Rightarrow \text{Iso. dans } \mathrm{Com}(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{Quasi-iso} \Rightarrow \text{Iso. dans } D(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{Même homologie}}$$

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

- C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i : C_i \to C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes $C_1, \ldots, C_k$ tels que

$$C \longleftarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longleftarrow \cdots \longrightarrow C_k \longleftarrow C'$$

 où les flèches sont des quasi-isomorphismes.
- C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$ si il existe des morphismes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $g \circ f \sim \mathrm{id}_C$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}_{C'}$.
- On a les implications suivantes:

$$\boxed{\text{Isomorphes} \Rightarrow \text{Iso. dans } \mathrm{Com}(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{Quasi-iso} \Rightarrow \text{Iso. dans } D(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{Même homologie}}$$

- Khovanov a montré dans son article d'origine que les $H^i(L)$ sont des invariants de nœuds en construisant des quasi-isomorphismes entre les complexes $C(D)$ et $C(D')$, si $D \equiv_{R-\text{move}} D'$.

Digression: morphismes de complexes

- Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, et C, C' deux complexes de $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$.
- C et C' sont **isomorphes** si il existe une collection d' isomorphismes $f_i : C_i \to C'_i$ de $\mathcal{C}$ tels que les carrés suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "d_C"'] & C'_{i+1} \arrow[d, "d_{C'}"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C'_i \end{tikzcd}$$

- C et C' sont **quasi-isomorphes** si il existe des morphismes $f_i : C_i \to C'_i$ tels que les carrés ci-dessus commutent, induisant des isomorphismes $H^i(C) \xrightarrow{f_i^*} H^i(C')$.
- C et C' sont **isomorphes dans la catégorie dérivée** $D(\mathcal{C})$ si il existe une suite des complexes $C_1, \dots, C_k$ tels que

$$C \longleftarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longleftarrow \cdots \longrightarrow C_k \longleftarrow C'$$

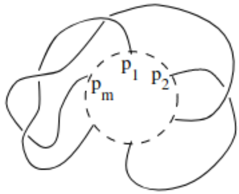
  où les flèches sont des quasi-isomorphismes.
- C et C' sont **équivalents à homotopie** (où isomorphes dans $\mathrm{Com}(\mathcal{C})$ si il existe des morphismes $f : C \to C'$ et $g : C' \to C$ tels que $g \circ f \sim \mathrm{id}_C$ et $f \circ g \sim \mathrm{id}_{C'}$.
- On a les implications suivantes:

$$\boxed{\text{Isomorphes} \Rightarrow \text{Iso. dans } \mathrm{Com}(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{Quasi-iso} \Rightarrow \text{Iso. dans } D(\mathcal{C}) \Rightarrow \text{Même homologie}}$$

- Khovanov a montré dans son article d'origine que les $H^i(L)$ sont des invariants de nœuds en construisant des quasi-isomorphismes entre les complexes $C(D)$ et $C(D')$, si $D \equiv_{R-\text{move}} D'$.
- Depuis, il a été démontré qu'en fait de tels complexes D et D' sont même équivalents à homotopie près, cf Bar Natan, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*.

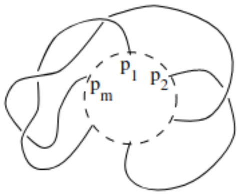
Surfaces et morphismes de cubes

- Soit U un disque fermé dans R^2, et T' un **enchevêtrement** (*i.e.* un plongement d'arcs et de cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$) avec m points sur $\partial U \times [0,1]$, et T une projection générique de T' sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathring{U}$.
- L'intersection de T avec ∂U consiste en m points, notés $p_1, \ldots, p_m$:

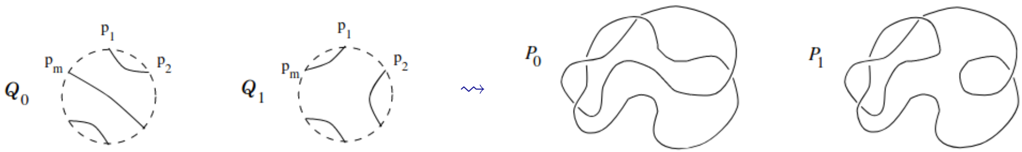


Surfaces et morphismes de cubes

- Soit U un disque fermé dans R^2, et T' un **enchevêtrement** (*i.e.* un plongement d'arcs et de cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$) avec m points sur $\partial U \times [0,1]$, et T une projection générique de T' sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathring{U}$.
- L'intersection de T avec ∂U consiste en m points, notés $p_1, \ldots, p_m$:

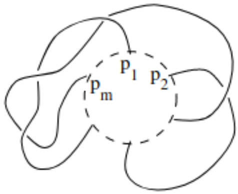


- Soient Q_0 et Q_1 deux systèmes de $m/2$ arcs dans U avec extrémités $p_1, \ldots, p_m$. Alors $P_0 := Q_0 \cup T$ et $P_1 := Q_1 \cup T$ peuvent être considérés comme des diagrammes d'entrelacs dans R^3:

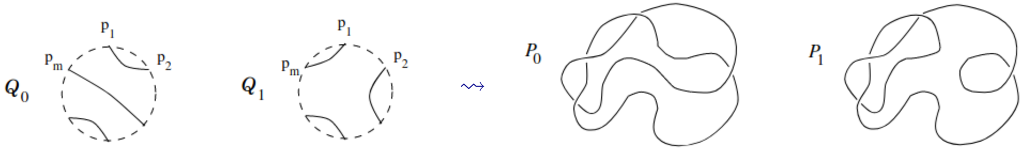


Surfaces et morphismes de cubes

- Soit U un disque fermé dans R^2, et T' un **enchevêtrement** (*i.e.* un plongement d'arcs et de cercles dans $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$) avec m points sur $\partial U \times [0,1]$, et T une projection générique de T' sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathring{U}$.
- L'intersection de T avec ∂U consiste en m points, notés $p_1, \ldots, p_m$:



- Soient Q_0 et Q_1 deux systèmes de $m/2$ arcs dans U avec extrémités $p_1, \ldots, p_m$. Alors $P_0 := Q_0 \cup T$ et $P_1 := Q_1 \cup T$ peuvent être considérés comme des diagrammes d'entrelacs dans R^3:



- On associe à P_0 et P_1 des I-cubes V_{P_0} et V_{P_1}. Soit S une surface compacte orientée de $U \times [0,1]$ telle que $\partial S = Q_0 \times \{0\}, Q_1 \times \{1\}, \{p_1, \ldots, p_m\} \times [0,1]$.
- À S on associe un morphisme de I-cubes $\psi_S : V_{P_0} \to V_{P_1}$. Pour ceci, on construit pour tout $J \subset I$ un morphisme

$$\psi_{S,J} : V_{P_0}(J)\{-|J|\} \to V_{P_1}(J)\{-|J|\}$$

Surfaces et morphismes de cubes

- Soit $J \subset I$, on associe une résolution $T(J)$ des croisements de T. Ainsi, $T(J)$ est une collection de cercles et d'arcs dans $\mathbb{R}^2 \backslash \overset{\circ}{U}$ avec extrémités $p_1, \ldots, p_m$. Donc

$$V_{P_0}(J) = F(T(J) \cup Q_0)\{-|J|\}, \qquad V_{P_1}(J) = F(T(J) \cup Q_1)\{-|J|\}$$

Surfaces et morphismes de cubes

- Soit $J \subset I$, on associe une résolution $T(J)$ des croisements de T. Ainsi, $T(J)$ est une collection de cercles et d'arcs dans $\mathbb{R}^2 \backslash \overset{\circ}{U}$ avec extrémités $p_1, \ldots, p_m$. Donc

$$V_{P_0}(J) = F(T(J) \cup Q_0)\{-|J|\}, \qquad V_{P_1}(J) = F(T(J) \cup Q_1)\{-|J|\}$$

- Soit S' une surface de $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ qui est $\begin{cases} S \text{ dans } U \times [0,1] \\ T(J) \times [0,1] \text{ en dehors de } U \times [0,1] \end{cases}$. Alors l'application

$$F(S') : F(T(J) \cup Q_0) \to F(T(J) \cup Q_1)$$

est un morphisme de R-modules gradués, de degré $\chi(S') = \chi(S) - m/2$.

Surfaces et morphismes de cubes

- Soit $J \subset I$, on associe une résolution $T(J)$ des croisements de T. Ainsi, $T(J)$ est une collection de cercles et d'arcs dans $\mathbb{R}^2 \backslash \overset{\circ}{U}$ avec extrémités $p_1, \ldots, p_m$. Donc

$$V_{P_0}(J) = F(T(J) \cup Q_0)\{-|J|\}, \qquad V_{P_1}(J) = F(T(J) \cup Q_1)\{-|J|\}$$

- Soit S' une surface de $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ qui est $\begin{cases} S \text{ dans } U \times [0,1] \\ T(J) \times [0,1] \text{ en dehors de } U \times [0,1] \end{cases}$. Alors l'application

$$F(S') : F(T(J) \cup Q_0) \to F(T(J) \cup Q_1)$$

est un morphisme de R-modules gradués, de degré $\chi(S') = \chi(S) - m/2$.

- Définissons $\psi_{S,J}$ par

$$\psi_{S,J} = F(S')\{-|J|\} : V_{P_0}(J)\{-|J|\} \to V_{P_1}(J)\{-|J[\}$$

- **Proposition :** L'application $\psi_S : V_{P_0} \to V_{P_1}$ est un morphisme de I-cubes, de degré $\chi(S) - m/2$.

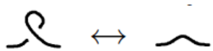
Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

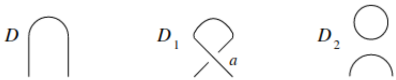
- **Mouvement de Reidemeister 1 :**  $\leftrightarrow$ 

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

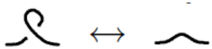
- **Mouvement de Reidemeister 1 :**  $\leftrightarrow$ 
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L, avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.

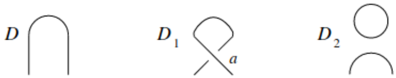
Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- **Mouvement de Reidemeister 1 :** 
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L, avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a: la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D.



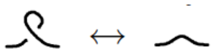
Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

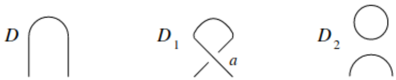
- **Mouvement de Reidemeister 1 :** 
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L, avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a: la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D.



- **Objectif :** Définir un quasi-isomorphisme entre les complexes $C(D)$ et $C(D_1)$.
  - On va décomposer le I'-cube V_{D_1} comme $V_{D_1} = V' \oplus V''$.
  - Ceci induit une décomposition de $C(D_1)$ comme la somme directe d'un complexe acyclique et d'un complexe isomorphe à $C(D)$.

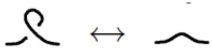
Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

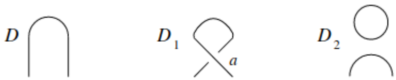
- **Mouvement de Reidemeister 1 :** 
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L, avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a: la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D.



- **Objectif :** Définir un quasi-isomorphisme entre les complexes $C(D)$ et $C(D_1)$.
  - On va décomposer le I'-cube V_{D_1} comme $V_{D_1} = V' \oplus V''$.
  - Ceci induit une décomposition de $C(D_1)$ comme la somme directe d'un complexe acyclique et d'un complexe isomorphe à $C(D)$.
- Puisque $D_2 = D \sqcup \bigcirc$, on a $V_{D_2} = V_D \otimes A$, qui est le cube défini par les sommets $V_D(J) \otimes_R A$ et morphismes de structure $\xi_a^{V_D}(J) \otimes \mathrm{id}_A$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- **Mouvement de Reidemeister 1 :** 
- Soit D un diagramme d'un entrelacs L, avec $n-1$ croisements, et D_1 un diagramme obtenu à partir de D en ajoutant une boucle comme ci-dessus.
- Soit I' (resp. I) l'ensemble des croisements de D_1 (resp. D), et a le croisement de la boucle de sorte que $I' = Ia$.
- Résolutions du croisement a: la 0-résolution est le diagramme D_2 ci-dessous, la 1-résolution est isotope à D.



- **Objectif :** Définir un quasi-isomorphisme entre les complexes $C(D)$ et $C(D_1)$.
  - On va décomposer le I'-cube V_{D_1} comme $V_{D_1} = V' \oplus V''$.
  - Ceci induit une décomposition de $C(D_1)$ comme la somme directe d'un complexe acyclique et d'un complexe isomorphe à $C(D)$.
- Puisque $D_2 = D \sqcup \bigcirc$, on a $V_{D_2} = V_D \otimes A$, qui est le cube défini par les sommets $V_D(J) \otimes_R A$ et morphismes de structure $\xi_a^{V_D}(J) \otimes \mathrm{id}_A$.
- Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage de a contenant la boucle:

et D, D_1 et D_2 coïncident en dehors de U.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- On définit des morphismes de I-cubes

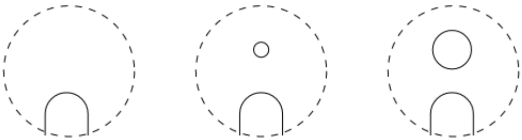
$$m_a : V_{D_2} \to V_D, \quad \Delta_a : V_D \to V_{D_2}, \quad \iota_a : V(D) \to V_{D_2}$$

- Le morphisme m_a est associé à la surface avec frontière $U \cap D_2 \times \{0\}$ et $U \cap D \times \{1\}$ caractérisée par

$U \times \{0\}$ $\quad$ $U \times \{0.5\}$ $\quad$ $U \times \{1\}$

- Le morphisme Δ_a est associé à la surface avec frontière $U \cap D \times \{0\}$ et $U \cap D_2 \times \{1\}$ caractérisée par

- Le morphisme ι_a est associé à la surface avec frontière $U \cap D \times \{0\}$ et $U \cap D_2 \times \{1\}$ caractérisée par



- Les morphismes m_a, Δ_a, ι_a ainsi construits sont gradués de degrés respectifs $-1, -1, 1$ (ce sont les degrés des cobordismes associés à m, Δ, ι via F.)

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \to V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \to V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \to V_{D_2}\{1\}$$

sont des morphismes dans $R - \mathrm{mod}_0$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \to V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \to V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \to V_{D_2}\{1\}$$

  sont des morphismes dans $R - \mathrm{mod}_0$.

- Par construction, $m_a \circ \iota_a = \mathrm{id}_{V_D}$. Définissons $j_a := \Delta_a - \iota_a \circ m_a \circ \Delta_a : V_D \to V_{D_2}$. C'est une application graduée de degré -1.

- **Proposition :** Le I-cube V_{D_2} se décompose comme

$$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D).$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \to V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \to V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \to V_{D_2}\{1\}$$

  sont des morphismes dans $R - \mathrm{mod}_0$.

- Par construction, $m_a \circ \iota_a = \mathrm{id}_{V_D}$. Définissons $j_a := \Delta_a - \iota_a \circ m_a \circ \Delta_a : V_D \to V_{D_2}$. C'est une application graduée de degré -1.

- **Proposition :** Le I-cube V_{D_2} se décompose comme

$$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D).$$

- Puisque D_1 est obtenu à partir de D, D_2 en ajoutant un croisement, le I'-cube V_{D_1} contient V_D et V_{D_2} comme des sous-cubes de codimension 1. Il y a des isomorphismes canoniques

$$V_{D_1}(\star 0) \simeq V_{D_2}, \qquad V_{D_1}(\star 1) \simeq V_D\{-1\}$$

  ($V_{D_1}(\star 0)$ est le $I' - \{a\} = I$-cube avec $V_{D_1}(\star 0)(J) = V(D_1)(J)$ pour $J \subset I$.)

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Ainsi, les morphismes

$$m_a : V_{D_2} \to V_D\{-1\}, \quad \Delta_a : V_D \to V_{D_2}\{-1\}, \quad \iota_a : V_D \to V_{D_2}\{1\}$$

sont des morphismes dans $R - \mathrm{mod}_0$.

- Par construction, $m_a \circ \iota_a = \mathrm{id}_{V_D}$. Définissons $j_a := \Delta_a - \iota_a \circ m_a \circ \Delta_a : V_D \to V_{D_2}$. C'est une application graduée de degré -1.

- **Proposition :** Le I-cube V_{D_2} se décompose comme

$$V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D).$$

- Puisque D_1 est obtenu à partir de D, D_2 en ajoutant un croisement, le I'-cube V_{D_1} contient V_D et V_{D_2} comme des sous-cubes de codimension 1. Il y a des isomorphismes canoniques

$$V_{D_1}(\star 0) \simeq V_{D_2}, \qquad V_{D_1}(\star 1) \simeq V_D\{-1\}$$

($V_{D_1}(\star 0)$ est le $I' - \{a\} = I$-cube avec $V_{D_1}(\star 0)(J) = V(D_1)(J)$ pour $J \subset I$.)

- Sous ces isomorphismes, le morphisme de structure $\xi_a^{V_{D_1}}$ satisfait

$$\left(\xi_a^{V_{D_1}} : V_{D_1}(\star 0) \to V_{D_1}(\star 1)\right) = (m_a : V_{D_2} \to V_D\{-1\}), \qquad \textit{i.e.}$$

$$\begin{tikzcd} V_{D_1}(\star 0) \arrow[r, "\xi_a^{V_{D_2}}"] \arrow[d, "\simeq"'] & V_{D_1}(\star 1) \arrow[d, "\simeq"] \\ V_{D_2} \arrow[r, "m_a"'] & V_D\{-1\} \end{tikzcd}$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

  - $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
  - $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

  - $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
  - $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.

- On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

  - $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
  - $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.
- On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

- **Proposition :** Le complexe $\overline{C}(V'' \otimes E_{I'})$ est acyclique.
  - Il est isomorphe à $\mathrm{Cone}(\mathrm{id} : \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1]\{-1\})$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

  - $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
  - $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.

- On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

- **Proposition :** Le complexe $\overline{C}(V'' \otimes E_{I'})$ est acyclique.
  - Il est isomorphe à $\mathrm{Cone}(\mathrm{id} : \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1]\{-1\})$.

- **Proposition :** Les complexes $\overline{C}(V' \otimes E_{I'})$ et $\overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\}$ sont isomorphes. En conséquence, $\overline{C}(D_1)$ et $\overline{C}(D)\{1\}$ sont quasi-isomorphes.

$$\begin{aligned} \overline{C}(V' \otimes E_{\mathcal{I}'}) &= \overline{C}(V'(*0) \otimes E_{\mathcal{I}}) \\ &= \overline{C}(V_D\{1\} \otimes E_{\mathcal{I}}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})\{1\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{C}(D_1) &= \overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{\mathcal{I}'}) \\ &= \overline{C}(V' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})\{1\} \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \\ &= \overline{C}(D)\{1\} \oplus (\text{Acyclic complex}) \end{aligned}$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 1

- Puisque $V_{D_2} = \iota_a(V_D) \oplus j_a(V_D)$, on peut alors décomposer V_{D_1} via ces isomorphismes en $V_{D_1} = V' \oplus V''$ avec

$$V'(\star 0) = j_a(V_D), \quad V'(\star 1) = 0, \quad V''(\star 0) = \iota_a(V_D), \quad V''(\star 1) = V_{D_1}(\star 1)$$

  - $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_2} et donc $j_a(V_D)$ est un sous-cube de V_{D_1} de codimension 1.
  - $V'(\star 1)(J) = 0$ pour tout $J \subset I$, donc $V'(J) = j_a(V_D(J)) \subset V_{D_1}(J)$ pour $J \subset I'$ si $a \notin J$, 0 si $a \in J$.

- On a alors $V_{D_1} \otimes E_{I'} = (V' \otimes E_{I'}) \oplus (V'' \otimes E_{I'})$, ce qui induit sur les complexes:

$$\overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{I'}) = \overline{C}(V' \otimes E_{I'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{I'}).$$

- **Proposition :** Le complexe $\overline{C}(V'' \otimes E_{I'})$ est acyclique.
  - Il est isomorphe à $\mathrm{Cone}(\mathrm{id} : \overline{C}(V_D \otimes E_I)[-1]\{-1\})$.

- **Proposition :** Les complexes $\overline{C}(V' \otimes E_{I'})$ et $\overline{C}(V_D \otimes E_I)\{1\}$ sont isomorphes. En conséquence, $\overline{C}(D_1)$ et $\overline{C}(D)\{1\}$ sont quasi-isomorphes.

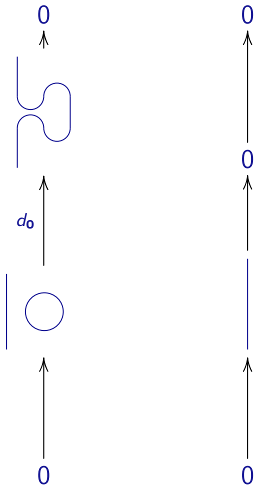
$$\begin{aligned} \overline{C}(V' \otimes E_{\mathcal{I}'}) &= \overline{C}(V'(*0) \otimes E_{\mathcal{I}}) \\ &= \overline{C}(V_D\{1\} \otimes E_{\mathcal{I}}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})\{1\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \overline{C}(D_1) &= \overline{C}(V_{D_1} \otimes E_{\mathcal{I}'}) \\ &= \overline{C}(V' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \\ &= \overline{C}(V_D \otimes E_{\mathcal{I}})\{1\} \oplus \overline{C}(V'' \otimes E_{\mathcal{I}'}) \\ &= \overline{C}(D)\{1\} \oplus (\text{Acyclic complex}) \end{aligned}$$

- $x(D_1) = x(D)$, $y(D_1) = y(D) + 1$, et

$$C(D) = \overline{D}[x(D)]\{2x(D) - y(D)\}, \quad C(D_1) = \overline{C}(D_1)[x(D_1)]\{2x(D_1) - y(D_1)\}$$
$$= \overline{C}(D_1)[x(D)]\{2x(D) - y(D) - 1\}$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants

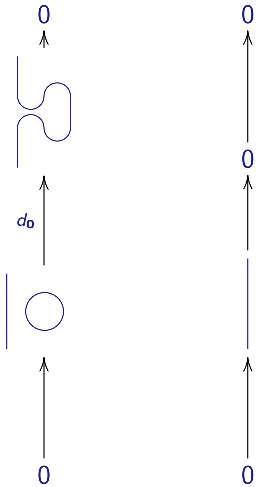


$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 & 0 \\ A \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ A \otimes A \arrow[u, "m"'] & A \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd} 0 & 0 \\ A \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\ A \otimes A \arrow[u, "m"'] & A \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

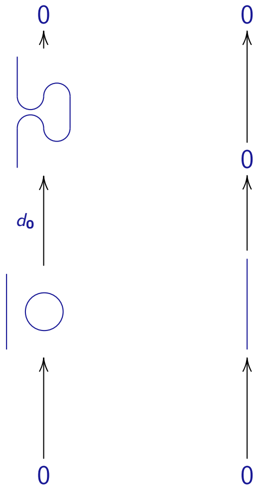
avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

- $\mathrm{Ker}(d_0) = \langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$, $\mathrm{Im}(d_0) = A$, donc

$$H^0(C_1) = R\langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle, \quad H^1(C_1) = 0.$$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



$$\rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} 0 \\ A \arrow[u] \\ A \otimes A \arrow[u, "m"'] \\ 0 \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \\ 0 \arrow[u] \\ A \arrow[u] \\ 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

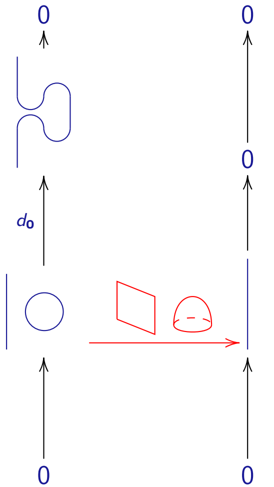
avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

- $\mathrm{Ker}(d_0) = \langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$, $\mathrm{Im}(d_0) = A$, donc
$$H^0(C_1) = R\langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle, \quad H^1(C_1) = 0.$$

- On a également $H^0(C_2) = A = R\langle 1, X \rangle$, $H^1(C_2) = 0$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 3

- Par un calcul direct d'homologie: on veut comparer les complexes C_1 et C_2 suivants



$\rightsquigarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 \\
A \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
A \otimes A \arrow[u, "m"] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon"] & A \arrow[u] \\
0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

avec A de rang 2 engendré par $1, X$.

- $\mathrm{Ker}(d_0) = \langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle$, $\mathrm{Im}(d_0) = A$, donc

$$H^0(C_1) = R\langle X \otimes X, 1 \otimes X - X \otimes 1 \rangle, \quad H^1(C_1) = 0.$$

- On a également $H^0(C_2) = A = R\langle 1, X \rangle$, $H^1(C_2) = 0$.

- On a $X \times X \overset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\mapsto} X$, $\quad 1 \otimes X - X \otimes 1 \overset{\mathrm{id} \otimes \varepsilon}{\mapsto} 1$, donc l'application $\mathrm{id} \otimes \varepsilon$ définit bien un quasi-isomorphisme de complexes (si on prend $c = 0$).

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R-move.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R-move.
- Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a, et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$\overline{C}($  $) = \Big(\overline{C}($  $) \xrightarrow{m} \overline{C}($  $)\{-1\}\Big)$

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R-move.
- Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a, et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$\overline{C}($  $) = \Big(\overline{C}($  $) \xrightarrow{m} \overline{C}($  $)\{-1\}\Big)$

- On définit un sous-complexe du complexe à droite par

$C' = \Big(\overline{C}($  $)_{\mathbf{1}} \xrightarrow{m} \overline{C}($  $)\{-1\}\Big)$

où $\overline{C}($  $)_{\mathbf{1}}$ indique que pour le cercle présent dans , on ne garde que la partie de A sur $\mathbf{1}$, et on oublie la partie sur X.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R-move.
- Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a, et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$\overline{C}($  $) = \Big(\overline{C}($  $) \xrightarrow{m} \overline{C}($  $)\{-1\}\Big)$

- On définit un sous-complexe du complexe à droite par

$C' = \Big(\overline{C}($  $)_{\mathbf{1}} \xrightarrow{m} \overline{C}($  $)\{-1\}\Big)$

où $\overline{C}($  $)_{\mathbf{1}}$ indique que pour le cercle présent dans , on ne garde que la partie de A sur $\mathbf{1}$, et on oublie la partie sur X.

- Puisque $\mathbf{1}$ est une unité pour 1, la différentielle de C' est donc l'identité et C' est donc acyclique. Regardons le quotient:

$C/C' = \Big(\overline{C}($  $)_{|\mathbf{1}=0} \longrightarrow 0\Big)$

où l'indice $|\ \mathbf{1} = 0$ indique que l'on quotiente le R-module A associé au cercle par $\langle \mathbf{1} = 0 \rangle$.

Invariance par Reidemeister 1 - Preuve 2

- Preuve de l'article de Bar Natan, manipule des complexes sur des diagrammes localement, comparant les cubes de résolution des deux côtés du R-move.

- Soit D_1 un diagramme de noeud contenant un croisement a, et D_2, D les 0 et 1-résolutions comme précédemment. On a

$$\overline{C}(\ $$  $$\ ) = \left(\overline{C}(\ $$  $$\ ) \xrightarrow{m} \overline{C}(\ $$  $$\ )\{-1\} \right)$$

- On définit un sous-complexe du complexe à droite par

$$C' = \left(\overline{C}(\ $$  $$\ )_{\mathbf{1}} \xrightarrow{m} \overline{C}(\ $$  $$\ )\{-1\} \right)$$

 où $\overline{C}($  $)_{\mathbf{1}}$ indique que pour le cercle présent dans , on ne garde que la partie de A sur $\mathbf{1}$, et on oublie la partie sur X.

- Puisque $\mathbf{1}$ est une unité pour 1, la différentielle de C' est donc l'identité et C' est donc acyclique. Regardons le quotient:

$$C/C' = \left(\overline{C}(\ $$  $$\ )_{|\mathbf{1}=0} \longrightarrow 0 \right)$$

 où l'indice $|\ \mathbf{1} = 0$ indique que l'on quotiente le R-module A associé au cercle par $\langle \mathbf{1} = 0 \rangle$.

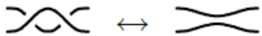
- Mais $A/\langle \mathbf{1} = 0 \rangle$ est de rang 1, engendré par X, et est donc à décalage près isomorphe à $\overline{C}($  $)$.

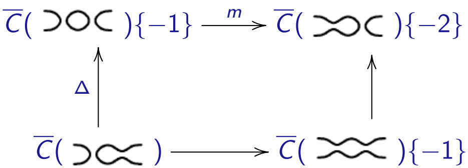
- Ce décalage est annulé par les décalages $[y(L)]\{2x(L) - y(L)\}$ qui apparaissent lorsqu'on passe de $\overline{C}$ à C.

Invariance par Reidemeister 2

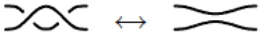
- **Mouvement de Reidemeister 2 :**  $\leftrightarrow$ 

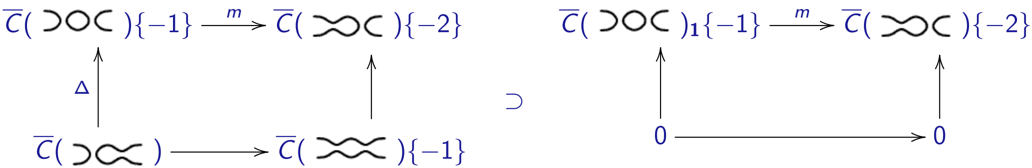
Invariance par Reidemeister 2

- **Mouvement de Reidemeister 2 :** 
- On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

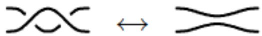


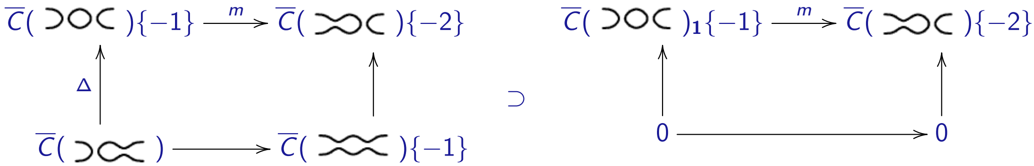
Invariance par Reidemeister 2

- **Mouvement de Reidemeister 2 :** 
- On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

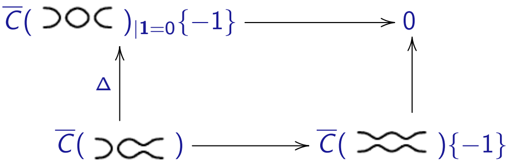


Invariance par Reidemeister 2

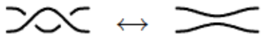
- **Mouvement de Reidemeister 2 :** 
- On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

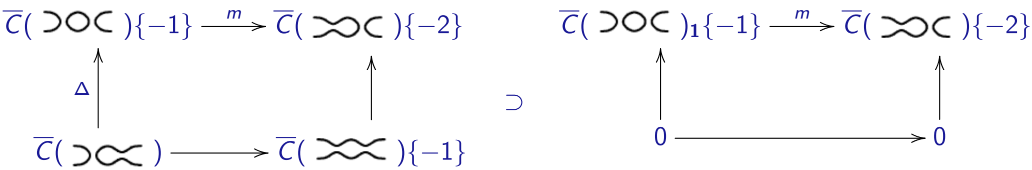


- Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

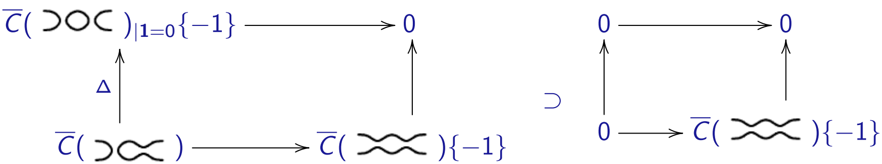


Invariance par Reidemeister 2

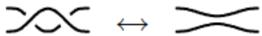
- **Mouvement de Reidemeister 2 :** 
- On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:

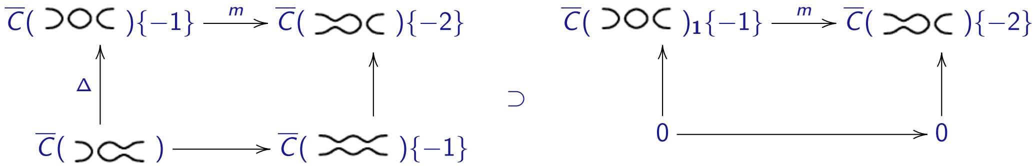


- Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

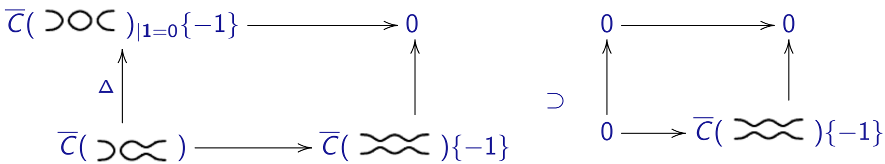


Invariance par Reidemeister 2

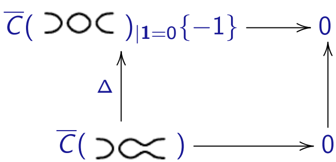
- **Mouvement de Reidemeister 2 :** 
- On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:



- Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:

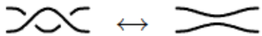


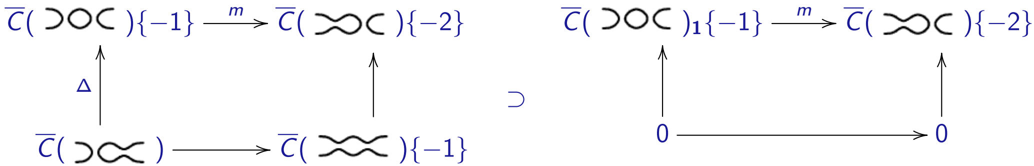
- Ceci donne un complexe C'', qui est celui associé au diagramme de droite de $R2$. Si on regarde le quotient $(C/C')/C''$, on alors



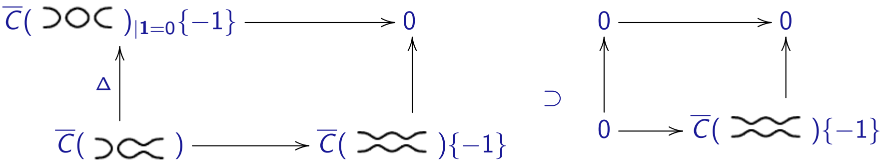
qui est acyclique.

Invariance par Reidemeister 2

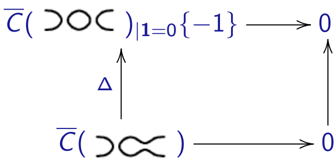
- **Mouvement de Reidemeister 2 :** 
- On a un carré commutatif de complexes provenant des résolutions des deux croisements de $R2$:



- Ce complexe C' est acyclique, considérons le complexe quotient:



- Ceci donne un complexe C'', qui est celui associé au diagramme de droite de $R2$. Si on regarde le quotient $(C/C')/C''$, on alors



qui est acyclique.

- **Conclusion :** $H^\bullet(C'') = H^\bullet(C/C') = H(C)$ puisque C' et $(C/C')/C''$ sont acycliques.

Autres références

- *A functor-valued invariant of tangles*, Mikhail Khovanov, 2002, arXiv:math /0103190, *Algebr. Geom. Topol. 2(1), 665-741*.
- *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*, Dror Bar-Natan, 2005, arXiv:math/0410495, *Geometry & Topology Vol. 9, 1443-1499*.
- *A 2-category of chronological cobordisms and odd Khovanov homology*, Krzysztof Putyra, 2014, arXiv:1310.1895, *Banach Center Publ. 103:291-355*

A Quick Reference Guide to Khovanov's Categorification of the Jones Polynomial

Dror Bar-Natan, 9 May 2002

The Kauffman Bracket: $\langle\emptyset\rangle = 1$; $\langle\bigcirc L\rangle = (q+q^{-1})\langle L\rangle$; $\langle\times\rangle = \langle\underset{\text{0-smoothing}}{\asymp}\rangle - q\langle\underset{\text{1-smoothing}}{)(}\rangle$.

The Jones Polynomial: $\hat{J}(L) = (-1)^{n_-}q^{n_+-2n_-}\langle L\rangle$, where (n_+, n_-) count $(\times,\times)$ crossings.

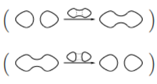
Khovanov's construction: $[\![L]\!]$ — a chain complex of graded $\mathbb{Z}$-modules;

$$[\![\emptyset]\!] = 0 \to \underset{\text{height } 0}{\mathbb{Z}} \to 0; \qquad [\![\bigcirc L]\!] = V \otimes [\![L]\!]; \qquad [\![\times]\!] = \text{Flatten}\left(0 \to \underset{\text{height } 0}{[\![\asymp]\!]} \to \underset{\text{height } 1}{[\![)(]\!]\{1\}} \to 0\right);$$

$$\mathcal{H}(L) = \mathcal{H}(\mathcal{C}(L) = [\![L]\!][-n_-]\{n_+ - 2n_-\})$$

$$V = \text{span}\langle v_+, v_-\rangle; \qquad \deg v_\pm = \pm 1; \qquad q\dim V = q + q^{-1} \quad \text{with} \quad q\dim\mathcal{O} := \sum_m q^m \dim \mathcal{O}_m;$$

$$\mathcal{O}\{l\}_m := \mathcal{O}_{m-l} \quad \text{so} \quad q\dim\mathcal{O}\{l\} = q^l\, q\dim\mathcal{O}; \qquad \cdot[s]: \quad \text{height shift by } s;$$

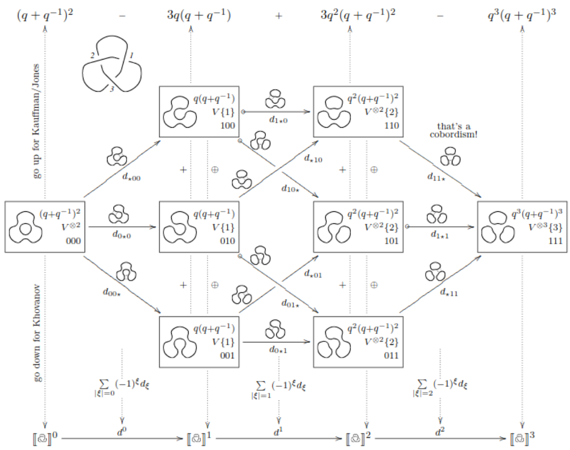


$$\longrightarrow (V \otimes V \xrightarrow{m} V) \qquad m: \begin{cases} v_+ \otimes v_- \mapsto v_- & v_+ \otimes v_+ \mapsto v_+ \\ v_- \otimes v_+ \mapsto v_- & v_- \otimes v_- \mapsto 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow (V \xrightarrow{\Delta} V \otimes V) \qquad \Delta: \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_- \otimes v_- \end{cases}$$

That's a Frobenius Algebra! And a (1 + 1)-dimensional TQFT!

Example: $\quad q^{-2} + 1 + q^2 - q^6 \xrightarrow[\text{(with } (n_+,n_-) = (3,0))]{\cdot(-1)^{n_-}q^{n_+-2n_-}} q + q^3 + q^5 - q^9$.



(here $(-1)^\xi := (-1)^{\sum_{i<j}\xi_i}$ if $\xi_j = \star$) $\qquad = [\![\text{trefoil}]\!] \xrightarrow[\text{(with } (n_+,n_-)=(3,0))]{\cdot[-n_-]\{n_+-2n_-\}} \mathcal{C}(\text{trefoil})$.

Theorem 1. The graded Euler characteristic of $\mathcal{C}(L)$ is $\hat{J}(L)$.

Theorem 2. The homology $\mathcal{H}(L)$ is a link invariant and thus so is $Kh_{\mathbb{F}}(L) := \sum_r t^r\, q\dim \mathcal{H}^r_{\mathbb{F}}(\mathcal{C}(L))$ over any field $\mathbb{F}$.

Theorem 3. $\mathcal{H}(\mathcal{C}(L))$ is strictly stronger than $\hat{J}(L)$: $\mathcal{H}(\mathcal{C}(\bar{5}_1)) \neq \mathcal{H}(\mathcal{C}(10_{132}))$ whereas $\hat{J}(\bar{5}_1) = \hat{J}(10_{132})$.

Conjecture 1. $Kh_{\mathbb{Q}}(L) = q^{s-1}\left(1 + q^2 + (1 + tq^4)Kh'\right)$ and $Kh_{\mathbb{F}_2}(L) = q^{s-1}(1+q^2)\left(1 + (1+tq^2)Kh'\right)$ for even $s = s(L)$ and non-negative-coefficients laurent polynomial $Kh' = Kh'(L)$.