Graphes : Parcours, plus court chemin - Partie II

⊙ Retour sur parcours en largeur et Dijkstra pour les matrices

- La définition de graphe avec une matrice d'adjacence par défaut de taille MAX_NOEUD * MAX_NOEUD n'est pas optimale.

Cela évite des allocations différentes à chaque création de graphe mais oblige :

- à travailler avec un paramètre MAX_NOEUD très grand quitte à stocker dans la matrice pleins de valeurs inutiles

OU

- à redéfinir la variable MAX_NOEUD lorsqu'on change le nombre de sommets des graphes étudiés

Mieux : On définit un graphe par

```
typedef struct graphe{
    int sommets;
    int ** adj;
}graphe
```

Dans la fonction new_graph, il faut alors allouer la taille qu'il faut pour la matrice :

```
graph->sommets = n;
graph->adj = malloc(n * sizeof(int*));
for (i=0; i<n; i++)
{
    graph->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
{
```

Il faut ensuite écrire une fonction pour libérer...

• Retour sur parcours en largeur, et Dijkstra sans file de priorité:

```
void accessibles_mat(graphe *graph, int s)
    int *vus = malloc(graph->vertices * sizeof(int))
    int k;
    for (k=0; k<graph->vertices; k++)
        vus[k]=0;
    fifo *aVisiter = new_file();
    vus[s] = 1;
    push(aVisiter, s);
    while (aVisiter->taille != 0){
        int U = take_first(aVisiter)
        for (int J=0; J< graph->vertices; J++){
            if (graph->adj[U][J] != 0 && vus[J]==0){
                vus[J] = 1;
                push(aVisiter, J);
            }
        }
        defiler(aVisiter);
    }
    print_acc(vus, graph->vertices, s);
    free(aVisiter);
    free(vus);
{
```

```
void dijkstra_mat(graphe *graph, int src){
    int n = graph->vertices;
    int *dist = malloc(n * sizeof(int));
    int *access = malloc(n * sizeof(int));
    for (int i=0; i<n; i++){
        dist[i] = INF;
        access[i] = 0;
    }
    dist[src] = 0;
    for (int count=0; count<n-1; count++){
        int u = minDistance(graph, dist, access);
        access[u] = 1;
        for (int j=0; j<n; j++){
            if (access[j]==0 && graph->adj[u][j]!=0
                && dist[u] + graph->adj[u][j] < dist[j]){
                dist[j] = dist[u] + graph->adj[u][j]
            }
        }
    }
    print_dist(dist, n, src);
    free(dist);
    free(access);
}
```

Le coefficient entouré en rouge représente le poids de l'arête qui va de u vers j dans graph.

On peut donc adopter aisément cet algorithme pour peu qu'on sache tester si il y a une arête de i vers j dans un graphe et en récupérer son poids.

pour d'autres implémentations de graphes

Exemple: Pour la représentation par les listes d'adjacence :

```
int is_edge_in_adjlist (graphe *graph; int i; int j){
    int test = 0;
    noeudListeAdj *m = graph → array[i].head
    while (m != NULL && test == 0){
        if (m → but == j)
            test = m → poids;
        m = m → suivant;
    }
    Return test
}
```

Ainsi, dans les algos précédents, il suffit de remplacer

graph → adj[u][j] par is_edge_in_adjlist (graph, u, j)

pour obtenir Dijkstra sans file de priorité.

Plan:

1. Représentation par triplets
2. Représentation par bains
3. D'autres algorithmes de plus court chemins
   a) Un algo naïf : puissances de matrices
   b) Algo. de Floyd - Warshall
   c) Algo de Bellman - Ford.

① Représentation par triplets

Supposons qu'on ait un graphe G à 15 sommets et une seule arête $0 \xrightarrow{10} 1$

Si on utilise une matrice d'adjacence pour représenter G, on va stocker $15 \times 15 = 225$ coefficients dont ... 224 zéros!

Or, il suffirait de connaître:

15 (nbs)

(0, 1, 10) la seule arête de G

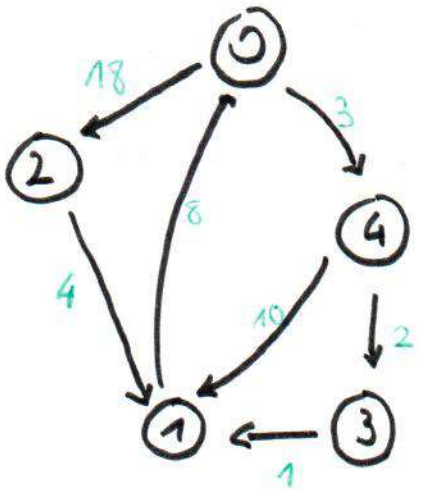
On peut éviter de stocker tous les zéros de la matrice d'adjacence en stockant de cette manière toutes les arêtes dans un vecteur contenant des triplets de la forme

(i, j, w) ↔ arête de i vers j de poids w dans G

```
typedef struct triplet{
    int i;
    int j;
    int poids;
}triplet;

typedef struct graphe{
    int nbs;
    int nba;
    triplet * aretes;
} graphe;
```

Exemple: Pour $G =$



Nombre de sommets: 5

Vecteur d'arêtes : (0,4,3), (0,2,18), (1,0,8), (2,1,4), (3,1,1), (4,1,10), (4,3,2)

Remarque: Pour déterminer si il y a une arête de i vers j dans G, il suffit de parcourir le vecteur d'arêtes. C'est une opération en $O(a)$ où a est le nombre d'arêtes de G.

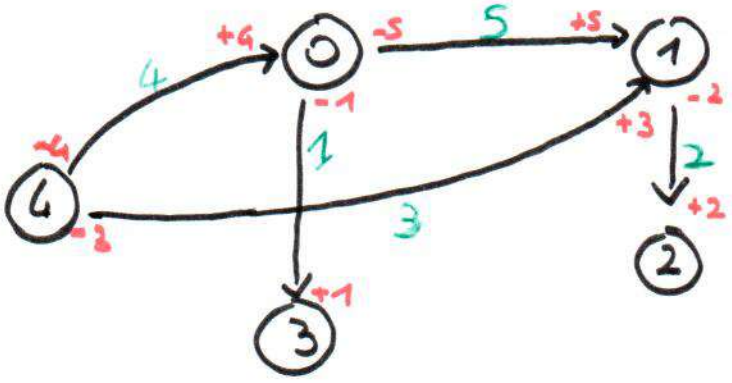
(2) Représentation par Trins

C'est une manière d'encoder un graphe introduite par Colin en 1973; très peu de références dans la littérature.

Principe: On considère un graphe, dont on va numéroter les

- arêtes (Si le graphe est pondéré, on peut garder les poids mais il faut des poids distincts)

Ex:



Une arête numérotée n va être séparée en deux parties :

- un brin $-n$ vers le sommet d'où part l'arête.
- un brin $+n$ vers le sommet où arrive l'arête.

On va ensuite associer à chaque sommet un brin (le premier brin), indiqué par le brin arrivant / sortant au / du sommet avec la plus petite étiquette, et gardant son signe.

Ex:

Sommet	0	1	2	3	4
Brin	-1	-2	$+2$	$+1$	-3

Ensuite, chaque brin est associé à un brin suivant en fonction du sommet qui lui est associé, ce brin suivant étant le premier qu'on rencontre en tournant autour du sommet dans le sens ↺

On aurait pu choisir l'autre convention, mais il faut être cohérent et garder la même.

Exi

Brin	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	5
Sommet	0	4	4	1	0	3	2	1	0	1
Brin Suivant	$+4$	-3	-4	$+5$	-5	$+1$	$+2$	-2	-1	3

① Comment reconstruire un graphe de manière unique à partir de cette donnée ?

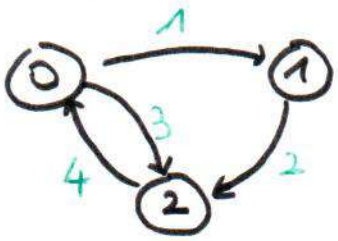
Exemple :

Brin	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
Sommet	2	0	1	0	1	2	2	0
Brin suivant	+2	-1	+1	+4	-2	+3	-4	0

On va construire un graphe à 3 sommets et 4 arêtes.

* Le fait que le brin -4 soit associé au sommet 2 va indiquer que l'arête étiquetée 4 va partir du sommet 2
* Le fait que le sommet 0 admette dans la ligne Brin suivant le +4 indique que ce brin va arriver vers 0

On a donc une arête (2) $\xrightarrow{4}$ (0) et on peut ainsi reconstruire le graphe :




```
typedef struct strand{
    Shulint node;
    short   next;
} strand
```

```
typedef struct strandgraph{
    Shulint nbS;
    Shulint nba;
    short *node;
    strand *nxt;
} strandgraphe
```

Brin — Sommet et brin suivant

③ D'autres algorithmes de plus court chemin

(a) Avec les puissances de la matrice d'adjacence : voir le bas de la page 13 des notes de la Partie I.

Algorithme de Floyd-Warshall

Distance d'un plus court chemin $\delta(u,v)$ entre deux sommets u et v pour toutes les paires (u,v)

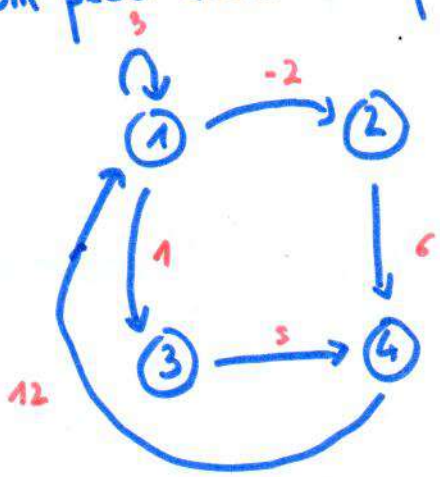
$G = (S, A)$ $\quad S = \{s_1, \dots, s_m\}$

On utilise une matrice $M :=$ $\quad M[i][j] = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ w(s_i, s_j) & \text{si } s_i \to s_j \in A \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$

et on veut construire une matrice $(\delta_{i,j})$ telle que $\delta_{i,j} = \delta(s_i, s_j)$

Rem: On peut avoir des poids négatifs

Ex:



$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & 3 & 0 & 5 \\ 12 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Idée de l'algo:

$P : \quad v_0 \to v_1 \to v_2 \dots \to v_{k-1} \to v_k$

$v_1 \to v_2 \dots \to v_{k-1}$: Intérieur de P

Un chemin d'intérieur vide est un chemin de la forme

v_k

ou $\quad v_k \to v_{k+1}$

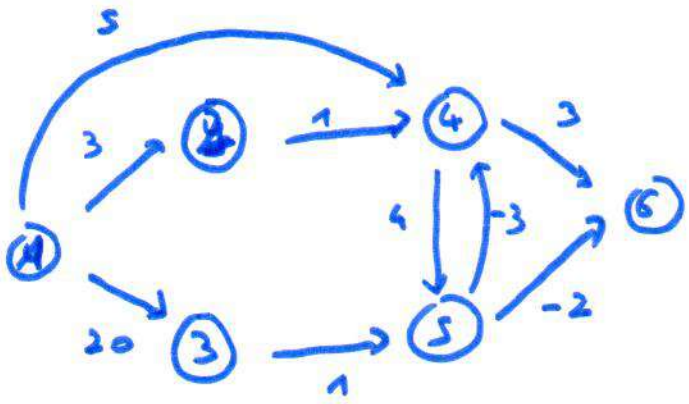
$\delta(s_i, s_j)$ = un chemin dont l'intérieur est potentiellement contenu dans tout S

L'idée est qu'on va chercher des chemins avec des intérieurs petits, et les autoriser à être de plus en plus grands

Soit $I \subseteq S$

Soit $\delta^I(u,v)$ la distance d'un PCC d'intérieurs inclus dans I

Ex:



$\delta^{\emptyset}(1,6) = \infty$

$\delta^{\{4\}}(1,6) = 8$

$\delta^{\{2,4\}}(1,6) = 7$

$\delta^{\{2,4,5\}}(1,6) = 6$

$\delta^{\{2,3,4,5\}}(1,6) = 6$

Propriété:

$$\delta^{I \cup \{x\}}(u,v) = \min\left(\delta^I(u,v);\ \delta^I(u,x) + \delta^I(x,v)\right)$$

$\delta^I(u,v)$: passer par x augmente la longueur du chemin

$\delta^I(u,x) + \delta^I(x,v)$: passer par x améliore le chemin

```
void floyd_warshall (graphe *g)
    int m = g->vertices;
    int dist[m][m];          ← Ici il faut construire la matrice initiale
     :
    for (k=0; k<m; k++){
        (for i=0; i<m; i++){
            for (j=0; j<m; j++){
                if (dist[i][k] + dist[k][j]
                    < dist[i,j])
                dist[i][j] = dist[i][k]
                + dist[k][j];
```

⑥ Algorithme de Bellman - Ford

C'est un algorithme de plus court chemin qui autorise d'avoir des arêtes avec des poids négatifs; mais pas de cycles de poids négatifs, par ex

↝ Le cycle ① → ② → ③ → ① amène un chemin de longueur -2 de ① vers lui-même. Ça n'a donc pas de sens de parler de plus court chemin de 0 vers 1 !

Une partie importante de l'algo consiste à vérifier qu'il n'y a pas de cycle négatif; on s'en passera ici car on garde notre hypothèse de poids positifs!

Idée: On va calculer les longueurs des chemins les plus courts de longueur k ; pour $k+1$.

Observation: • Les chemins les plus courts auront au plus $n-1$ arêtes! (où n = nb de sommets)

En effet: Si il y a plus de n arêtes, on passe par un sommet au moins 2 fois donc il y a forcément un cycle. Si ce cycle est de poids ≥ 0, il est mauvais pour le plus court chemin donc on l'oublie. Il ne peut pas être de poids $<=0$.

• De plus, un chemin de longueur k de $u \to v$ est
{ un chemin de longueur $k-1$ de $u \to w$ (où w est un voisin de v)
{ une arête $w \to v$

Notons $dist^k[v]$ la longueur du plus court chemin de src=u vers v avec au plus k arêtes

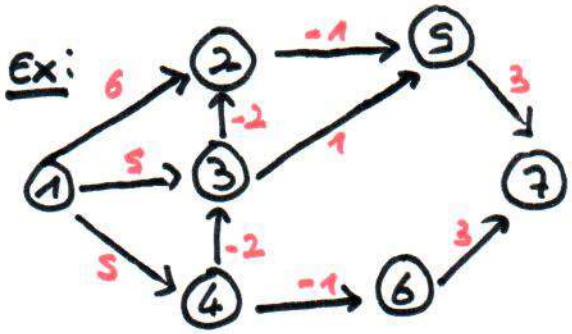
On a alors :

$$dist^k[v] = \min\left(dist^{k-1}[v],\ dist^{k-1}[w] + poids(w \to v) \text{ pour tout voisin } w \text{ de } v \right)$$

Formule de récurrence !

Initialisation : $dist^0[u] = 0$ $dist^0[w] = INF$ pour tout autre sommet

Ex :



Longueur chemin \ Sommet	1	2	3	4	5	6	7
0	0	INF	INF	INF	INF	INF	INF
1	0	6	5	5	INF	INF	INF
2	0	3	3	5	5	4	INF
3	0	1	3	5	2	4	7
4	0	1	3	5	0	4	5
5	0	1	3	5	0	4	3
6	0	1	3	5	0	4	3

Pour la représentation triplets :

```
void bellmanford (graphe * graph, int src){
    int m = graph->mbs;
    int a = graph->na;
    int u, v, poids;
    int * dist = malloc( m * sizeof(int))
    for (int k=0; k<m; k++)
        dist[k] = INF;
    dist[src] = 0;
        :
```

```
    ⋮
    for (int k=0; k<m; k++){
        for (int l=0; l<a; l++){
            u = graph->aretes[l].i;
            v = graph->aretes[l].j;
            poids = graph->aretes[l].poids;
            if (poids != 0 && dist[u] + poids < dist[v])
                dist[v] = dist[u] + poids
        }
    }
    print_dist (dist, m, src);
    free (dist);
}
```

④ Complexités

Floyd - Warshall $O(m^3)$

Bellman - Ford:
- $O(m^3)$ avec matrice d'adjacence
- $O(m \times a)$ avec liste d'adjacence
- $O(m \times a)$ avec triplets

	Matrice Adj.	Liste Adj.	Triplets
Dijkstra	$O(2m^2)$	$O(m^2 + ma)$	$O(m^2 + ma)$
Dijkstra avec tas binaire	$O(m\log(m) + m^2)$	$O((m+a)\log(m))$	$O(m\log(m) + am$